INTRODUCCION

AL ESTUDIO

DE LA ARQUITECTURA HIDRÁULICA

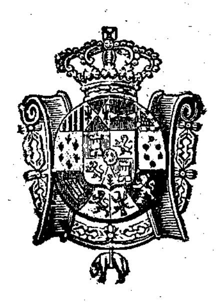
PARA EL USO

DE LA ACADEMIA ESPECIAL DE INGENIEROS

POR DON CELESTINO DEL PIÉLAGO,

CABALLERO DE LA ORDEN MILITAR DE S. HERMENEGILDO, ACADEMICO DE MERITO DE LA DE NOBLES ARTES DE S. FERNANDO, CORONEL EFECTIVO DE INFANTERIA, TENIENTE CORONEL DEL CUERPO DE INGENIEROS Y GEFE DEL DETALL DE SU ACADEMIA.

Trata del movimiento, direccion y distribucion de las aguas, y de su fuerza y resistencia.



MADRID.

EN LA IMPRENTA NACIONAL.

1841.

Esta obra y las siguientes se venden por cuenta de la Academia en la librería de D. Antonio Perez, calle de Carretas.

Tratado de fortificacion y edificios militares, por Taramas.

Tratado de dibujo, por D. Antonio Bandaran.

Tratado completo de Mecánica, por D. Fernando Garcia San Pedro.

Geometría analítica, por el mismo.

Teoría mecánica á las construcciones, por D. Celestino del Pielago.

EXCMO. SEÑOR:

La honrosa acogida que V. E. se dignó dar á la teoría mecánica de las construcciones me anima á presentarle con confianza de igual buen éxito el adjunto escrito, que ruego á V. E. mire como una expresion humilde de mi gratitud por la generosidad con que S. M., excitada por la eficaz recomendacion de V. E., premió aquel fruto de mis tareas.

Al escribir estas lecciones, mi objeto ha sido llenar la primera parte del art. 8.°, tercer año del curso de estudios de esta Academia, esto es, poner á los alumnos en estado de resolver todos los problemas que en la arquitectura hidráulica pueden ocurrir acerca del movimiento, direccion y distribucion de las aguas. Dándose cuenta de ellos en el índice, no necesito molestar la atencion de V. E. con su prolija enumeracion; pero creo un deber mio poner en su conocimiento los materiales de que me he valido y la intencion que me ha guiado en la formacion de este libro.

El saber de los españoles en hidráulica consta mas bien por las construcciones existentes que por las obras impresas. No hay, con efecto, en castellano ninguna que sobre este asunto pueda darnos la suficiente instruccion. La teoría de los rios, inserta en la siempre estimada

arquitectura hidrálica de nuestro infatigable D. Benito Bails, ha sido reconocida posteriormente como errónea, y este es el único artículo de aquella obra que tiene relacion con el presente escrito. El tratado de las aguas de D. José Mariano Vallejo, lleno de excelentes noticias, unas útiles, otras curiosas; cuyas páginas estan denotando á cada paso la candorosa buena fe, el españolismo, la laboriosidad y erudicion de su autor; adornado de extractos de excelentes obras extrangeras, que producen el buen efecto de excitar á los lectores á su completo estudio; este apreciable tratado no fue escrito para la enseñanza, ni era propio para la de nuestros alumnos. Desnudo de demostraciones, y limitado á prescribir reglas para el comun provecho de los españoles, no podia bastar á discípulos que ya versados en el análisis matemático, tienen derecho á que se les expongan las razones de las cosas, al menos hasta el punto que haya alcanzado el humano entendimiento. De todos modos (y permítame V. E. expresar, aunque de paso, esta opinion mia) por laudable que aparezca el empeño de hacer descender las ciencias hasta ponerlas al alcance del vulgo, sobre ser las mas veces infructuoso, tiende á impedir su progreso, siendo mas fácil y mas fecundo en resultados útiles generalizar los estudios matemáticos y con ellos la lengua que sirve de instrumento para comprenderlas, penetrar mas adelante en sus arcanos y extender su dominio.

Entre las obras francesas sobre la hidráulica ninguna me satisfizo tanto, ni me pareció mejor acomodada para nuestra Academia, que la de Mr. D'Aubuisson publicada en 1834, y escrita de intento para el uso de los ingenieros. Muy bien ordenadas las materias, oportunidad en los ejemplos, sencillez en la exposicion, tales cualidades hacen de mucho mérito su libro, singularmente para los que buscamos en estas lecturas la inmediata utilidad en las aplicaciones que la sociedad requiere. Lo único que se echa de menos es el rigor en las demostraciones. Empeñado en no valerse de los principios de mecánica que le parecian un tanto elevados, y empleando las mas veces el lenguaje ordinario en sus raciocinios, fuerza es confesar que el lector queda poco satisfecho de su exactitud, y que al ver la confirmacion que da la experiencia á sus resultados, mas bien considera aquellos como un esfuerzo hecho para explicarlos, que como una demostracion directa de ellos.

Proponiéndome llenar este vacío sin separarme del órden seguido por Mr. D'Aubuisson, ni desaprovechar las aplicaciones interesantes que su libro encierra, vino por fortuna á mis manos una memoria de Mr. Coriolis sobre la figura de los remansos, inserta en los Anales de Puentes y Caminos de Francia año de 1836, en que por medio del principio de las fuerzas vivas establece con el deseado rigor y notable sencillez la ecuacion del movimiento de las corrientes; y vi desde luego que con igual facilidad se podia aplicar el mismo principio á los demas casos de la salida de los fluidos por las bocas de los depósitos, y de su movimiento en las cañerías.

Ya cumplido á mi ver este objeto, considerando que el presente escrito no solamente puede servir para los alumnos, á quienes especialmente se dirige, sino tambien para los ingenieros por el uso que de él ó de otro semejante han de hacer necesariamente en las comisiones de esta naturaleza que se les confien, me pareció conveniente presentar por via de introduccion algunas nociones de mecánica de las que creo mas indispensables para entrar debidamente preparados en la lectura de este libro, sin la molestia de acudir á los especiales de la ciencia, que tal vez no tendrian á la mano. Como

quiera que sea, me atrevo á esperar que esta reseña sobre el espíritu de las verdades fundamentales de la mecánica no carecerá de interés, ni tal vez de novedad á los ojos de los entendidos que hayan observado cuán difícil es fijar en la mente de los jóvenes la verdadera significacion de ciertas palabras y frases, por frecuentemente que se usen.

Ademas de los escritos mencionados y otros varios menos notables, he tenido presentes las notas de Mr. Navier al primer tomo de la arquitectura hidráulica de Belidor, notas que bastarian para crearle un nombre entre los mas aventajados si no hubiese adquirido por las demas obras suyas otros títulos aun mas gloriosos; y tambien las lecciones sobre la hidráulica del mismo Navier publicadas en 1838 despues de su sensible temprana muerte, las cuales á mi corto entender se resienten de esta triste circunstancia: abrazando las cuestiones con mucha generalidad, é indicando con sobrada ligereza lo que mas importa saber, deja su libro á excesiva distancia de las aplicaciones, y de consiguiente poco propio para nuestra enseñanza, bien que muy digno de ser meditado por los que se complacen en esta especie de estudios sin desalentarse por la complicacion de los cálculos.

Los que van insertos en la presente obra son de pura necesidad, y estan al alcance del comun de los lectores que hayan estudiado los simples elementos del análisis. Cediendo, sin embargo, á las indicaciones de algunos compañeros del arma, amigos mios, que echaron de menos mas ejemplos de las doctrinas establecidas en la teoría de las construcciones, van resueltos en ella muchos problemas numéricos, que si bien de puro ejercicio para la clase, indican al mismo tiempo la aplicacion de las fórmulas á los casos prácticos.

Mucho recelo que este libro no satisfaga las condiciones que son de desear, y esto no por falta de tiempo, ni de esmero, ni de ensayos, sino por la de suficiencia (que sin pretension de que se atribuya á modestia confieso y reconozco); pero el interés que por su naturaleza excita el asunto, no solo para el servicio del Cuerpo, sino tambien para la prosperidad nacional al abrirse con la próxima pacificacion una nueva era de empresas de agricultura, de navegacion interior y de industria, á que no pueden menos de dedicarse los ánimos y los capitales, y que son una aplicacion inmediata de sus doctrinas, me hace esperar que será recibido por V. E. con la estimacion que acostumbra dar á trabajos de esta clase, y de que mi corazon conservará siempre pruebas muy señaladas.

Dios guarde á V. E. muchos años. Madrid 29 de Mayo de 1840.

EXCMO. SEÑOR:

Celestino del Piélago.

EXCMO. SR. DON LUIS MARIA BALANZAT,
INGENIERO GENERAL.

ACADEMIA ESPECIAL DE INGENIEROS.

INFORME *dado por su Junta de Profesores al Excmo. Sr. Ingeniero general sobre la Obra titulada* Introduccion al estudio de la Arquitectura hidráulica, *compuesta por el Coronel* D. CELESTINO DEL PIÉLAGO.

Nada hay en la profesion del ingeniero que requiera como los trabajos relativos á construcciones hidráulicas mayores conocimientos, estudios mas detenidos, ni talentos capaces de vencer por sí mismos las dificultades con que el arte lucha frecuentemente en todas sus operaciones.

El movimiento de las aguas, acompañado de infinitos accidentes que lo modifican, y su accion sobre los cuerpos sólidos que lo rodean, alterada sin cesar por pequeñas causas, pequeñas quizá en la apariencia, aunque de gran valor en sus efectos por su acumulacion y por la continuidad con que obran, este movimiento y esta accion, decimos, tan inmensamente variables de unos casos á otros, no pueden comprenderse bien en todos y sujetarse á condiciones que satisfagan las necesidades de la industria ó de las artes, sin un tino particular, creado á fuerza de profundas y bien dirigidas meditaciones. La antorcha de la práctica es ademas precisa siempre para guiar nuestros raciocinios y prevenir sus extravíos.

Muchos son los esfuerzos hechos hasta el dia para cultivar y adelantar tan importante asunto; pero en medio de ellos y del distinguido aprecio que merecen, es forzoso confesar que sus resultados, marcados aun con el sello de las dificultades, que ha sido preciso vencer para obtenerlos, distan bastante de la perfeccion que seria de desear en tales ramos. Los principios alcanzados, las fórmulas y reglas establecidas, fundadas constantemente en hipótesis mas ó menos admisibles y que no se acercan de iguales maneras á la realidad, no pueden emplearse en los usos de la vida sin que la experiencia los haya acreditado, y muchas veces corregido.

Estas ligeras indicaciones, haciendo conocer el estado en que se encuentra la ciencia relativamente al ramo que abraza el trabajo adjunto sobre que informamos, dan una idea de los obstáculos con que ha tenido que luchar su autor para llevarlo á cabo. No tememos decirlo, porque no se nos tachará de parcialidad: solo su buen criterio, guiado por los profundos conocimientos que posee en estas materias, de que ya tiene dadas relevantes pruebas, ha podido salir airoso de una empresa en que el acierto es tanto mas dificil, cuanto es grande y desordenada la confusion en que se le presentaban los medios de realizarla.

El estudio de la arquitectura hidráulica se funda muy particularmente en el de las propiedades y circunstancias del movimiento de las aguas. Combinadas las nociones que se adquieren por el último con las reglas que prescribe la teoría general mecánica de las construcciones, aquel importante ramo de la profesion del ingeniero puede mirarse provisto de los medios necesarios para ejercerse con inteligencia y acierto; y aunque nuestro plan de enseñanza en la Academia le señala un artículo especial, es muy fácil y sencillo llenarle despues satisfactoriamente.

El adjunto trabajo, llamado muy oportunamente *Introduccion al estudio de la Arquitectura Hidráulica*, tiene por objeto allanar el camino que conduce al cumplimiento de este artículo de nuestro régimen de instruccion. Analizando el movimiento del agua bajo los diversos conceptos en que se la puede aplicar á los usos de la vida ó de la industria, hace el autor que unidas sus doctrinas con las que ya le debemos, relativas á las construcciones en general, casi nada falte para tener un curso entero que abrace lo inmediatamente útil, lo aplicable de nuestra enseñanza elemental en tan importante asunto.

El plan de su obra es muy sencillo y está trazado con maestría. Ofrece primero á los que la lean un recuerdo de las principales verdades de la mecánica que han de tomar parte en su estudio.

Esta especie de extractos ó resúmenes de las doctrinas teóricas son extremadamente útiles bajo muchos aspectos. Para las personas que acaben de aprender una ciencia, son como cuadros en que la verán toda desde un solo punto de vista con los rasgos

principales que forman su esencia, y los que por el trascurso del tiempo la hubieren olvidado ó en todo ó en parte, dispensándose de repetir su estudio, se acercan á sus aplicaciones y hallan fácil el ejercicio de la práctica, que de otro modo seria muchas veces violento, y siempre ciego ú oscuro.

Despues de estas nociones considera el movimiento del agua: primero á la salida de un depósito en diversas hipótesis: segundo en las corrientes, en los canales, en los rios, en las cañerías y en los surtidores; y por último, en el caso de chocar contra un cuerpo sólido ó fluido.

Leyendo solo el índice prolijo y minucioso que precede á la obra, es fácil formarse idea de la extension con que se presentan tratadas sus partes. Tomadas primero bajo el aspecto mas general posible, se desciende sucesivamente á casos particulares, hasta presentar ejemplos de inmediata y definitiva aplicacion. Este método de exposicion que satisface á todas las condiciones de una enseñanza elemental bien entendida, no puede menos de ser aplaudido siempre.

Para la eleccion de los materiales empleados en la formacion de este libro, su autor se ha valido principalmente de los trabajos de D'Aubuisson, Navier y Coriolis, que son sin disputa en nuestro tiempo los mas acreditados. En medio de las muchas cuestiones parciales y aisladas que hay resueltas en varias obras, experiencias esparcidas en diversos tratados, y teorías incompletas que de cuando en cuando han aparecido, no era fácil, como ya se ha indicado antes, designar lo que convenia traer á una obra verdaderamente elemental; y sin duda alguna la manera con que se presenta vencida esta dificultad, no es el menor título de recomendacion para el libro de que tratamos. En España desgraciadamente no se hacen experimentos relativos al estudio de los diversos ramos de la fisica, ó si se hacen no se publican, ni se utilizan en el progreso de las ciencias. De esta falta nace que el genio y los talentos, que sin duda alguna se desarrollarian al cultivarlas, no pueden elevarse á la region de los descubrimientos útiles, porque carecen de ese apoyo sin el cual es del todo imposible avanzar en tales materias. Sometidos á lo que en este punto recibimos de los extrangeros, menester es decirlo con dolor, no

podemos salir de cierta tutela que nos hace tímidos ó circunspectos en demasía, ó que influye quizá mas de lo que á primera vista parece en el desaliento con que cultivamos las mismas ciencias. El autor de esta obra ha hecho esfuerzos nobles para vencer el poderoso embarazo que semejante causa opone á nuestros adelantos y á nuestro crédito. Tomando sus doctrinas de los trabajos citados, las ha enlazado á su manera, las ha perfeccionado y las ha acomodado á nuestras necesidades, de modo que su libro tiene el sabor de español, que quisiéramos encontrar en todas las producciones de su especie que se publiquen entre nosotros.

La Junta, resumiendo las reflexiones que acaba de hacer presentes á V. E., no puede menos de elogiar el celo de este individuo suyo que tanto se afana por el lustre y progresos de nuestra institucion; y aplaudiendo el tino y la inteligencia con que ha sabido llevarlo á cabo, recomendar á V. E. su trabajo. Madrid 14 de Junio de 1840. = Blas Manuel Teruel, Presidente. = Fernando García S. Pedro. = Juan Cárlos Cardona. = Joaquin Barraquer. = Juan Gomez Landero. = Luis Gautier. = Joaquin Terrer. = Manuel Diez Prado. = Pedro Burriel. = Ignacio María del Castillo, Secretario.

TABLA DE LAS MATERIAS.

SECCION PRIMERA.

DEL MOVIMIENTO DEL AGUA A SU SALIDA DE UN DEPÓSITO POR BOCAS ABIERTAS EN SUS PAREDES.

*

ALFABETO GRIEGO

PARA FACILITAR LA LECTURA DE LOS CALCULOS.

Α α. . . . . Alpha.
Β β ϐ. . . . . Beta.
Γ γ ┌. . . . . Gamma.
Δ δ. . . . . Delta.
Ε ε. . . . . Epsilon.
Ζ ζ. . . . . Zeta.
Η η. . . . . Eta.
Θ θ ϑ. . . . . Theta.
Ι ι. . . . . Iota.
Κ κ. . . . . Cappa.
Λ λ. . . . . Lambda.
Μ μ. . . . . Mu.
Ν ν. . . . . Nu.
Ξ ξ. . . . . Xi.
Ο ο. . . . . Omicron.
Π π ϖ. . . . . Pi.
Ρ ρ ϱ. . . . . Rho.
Σ σ ς. . . . . Sigma.
Τ τ ꚍ. . . . . Tau.
Υ υ. . . . . Upsilon.
Φ φ. . . . . Phi.
Χ χ. . . . . Chi.
Ψ ψ. . . . . Psi.
Ω ω. . . . . Omega.

INTRODUCCION

AL ESTUDIO DE LA ARQUITECTURA HIDRÁULICA.

NOCIONES PRELIMINARES.

1. Las construcciones de que se ha de tratar en adelante, unas veces se ejecutan dentro del agua, y otras tienen por objeto dirigirla y aun distribuirla. La investigacion de las leyes de su movimiento, ya salga de ciertos reservatorios, ya corra por los rios, por los canales ó por los acueductos, y la medicion de su fuerza y la de su resistencia sea que choque con cuerpos sólidos ó sea que estos naveguen sobre su superficie, van á ser el asunto de este libro. Reunidas asi las fórmulas hidráulicas de que tengamos que hacer uso, no habrá para qué detenerse en los problemas á que dé motivo cada construccion. Mas á fin de entrar con mas facilidad en este estudio, recordaremos algunas definiciones y principios de mecánica que de todos modos se conceptúan útiles para que se refresquen y fijen las ideas de los discípulos.

2. Se llama *masa* de un cuerpo á la *cantidad de materia* que contiene: es proporcional al *peso* del mismo cuerpo. Para valuarla en números es preciso referirla á una unidad convenida. Bien que el tamaño de esta unidad sea indiferente, cuando, como en la mecánica celeste, se tienen que considerar simultáneamente varios cuerpos, la masa de uno de ellos es la que suele tomarse por unidad, y en los

cuerpos que para los usos sociales se consideran sobre la superficie de nuestro globo, el número de unidades de masa de cada uno se representa por el cuociente de su peso dividido por la velocidad que en cada unidad de tiempo imprime la gravedad á los cuerpos pesados. Fijando de una vez para todas la unidad de tiempo, la de peso y la de longitud, que para nosotros serán el segundo, el quintal y la pulgada, y llamando

P el peso de un cuerpo,
m el número de unidades de su masa,
g el incremento de velocidad que en cada segundo adquieren los cuerpos cediendo libremente á la accion de la pesantez,

se tendrá siempre

$$m = \frac{P}{g}.$$

Segun esto, siendo $g = 422$ pulgadas, la unidad de masa será la de un cuerpo cuyo peso sea de 422 quintales, y se hallará por ejemplo en una esfera de hierro de $36^p,93$ de radio, siendo $0^q,002$ el peso de la pulgada cúbica.

Si se tomara el grano por unidad de peso y el radio terrestre por unidad de longitud, siendo este radio de unos 22850000 pies, el cuerpo que pesase 0,00000154 de grano contendría la unidad de masa. El volúmen de hierro correspondiente seria el de un cubo de poco menos de 0,00113 de línea de lado, cantidad casi imperceptible á nuestros sentidos. Tal vez por esta consideracion se suele dar el nombre de *punto material* á la unidad de masa, y tomarse tambien como tal unidad cada *molécula* de un cuerpo; pero no debe olvidarse que esta cantidad es esencialmente distinta é infinitamente grande respecto de la que se llama *elemento de la masa*, bajo cuya acepcion se toma muchas veces la *molécula* de un cuerpo, y aun tambien el *punto material.*

3. Se da el nombre de *densidad* á la *masa* de un cuerpo *referida á la unidad de volúmen.* Si el cuerpo es homogéneo, es decir, si la masa está repartida uniformemente en el espacio que ocupa, su densidad es la *masa contenida en la unidad de volúmen*, y es proporcional por consiguiente al peso de esta unidad, ó como se dice, al peso específico del cuerpo.

En este caso llamando

Π al peso de la unidad de volúmen,
D á la densidad ó al número de unidades de masa que contiene esta unidad,
w al volúmen del cuerpo,
m á su masa,

se tiene

$$D = \frac{\Pi}{g}, \quad m = Dw.$$

Por ejemplo, para el hierro cuyo peso específico ó el de la pulgada cúbica es $\Pi = 0^q,002$, la densidad es $D = \frac{0,002}{422} = 0,0000047$ de la unidad de masa. Una barra de hierro de 1000^{ppp} contendrá 0,0047 de la unidad de masa, sea que este valor se deduzca de la expresion $m = \frac{P}{g}$, ó de la $m = Dw$. Nótese de paso que no debe confundirse la densidad con la pesantez específica, bien que le sea proporcional (*).

(*) Suele tambien llamarse *pesantez específica* de un cuerpo á la relacion de su peso con el de un volúmen igual de agua. Esta valuacion es sumamente cómoda, porque independiente por su naturaleza de los sistemas de medidas, sirve para todas las naciones, y representa tambien la relacion entre la densidad del cuerpo y la del agua.

Si el cuerpo no es homogéneo, su densidad es variable de un punto á otro. Suponiéndola funcion de la posicion que el punto ocupa en el cuerpo referida á tres ejes rectangulares y dada por sus coordenadas x, y, z, y representando por dm la masa contenida en el volúmen elemental $dxdydz$, la densidad variable D correspondiente á este elemento será segun la definicion dada al principio de este número el cuarto término de la proporcion

$$dxdydz : 1 :: dm : D$$

ó

$$D = \frac{dm}{dxdydz};$$

y la masa m del cuerpo

$$m = \iiint Ddxdydz;$$

tomando la integral para cada variable entre los límites que corresponden á la superficie del cuerpo.

La masa de un cuerpo permanece la misma aun cuando varíe su figura ó su volúmen, mientras no reciba ó pierda materia; pero la densidad está sometida á alteraciones nacidas de diversas causas. Una de ellas es la compresion, cuyo efecto es disminuir el volúmen de los cuerpos y aumentar su densidad. Otra cuyo efecto sobre el agua vamos á apuntar es el calor. Él en efecto obra como una fuerza que tiende á separar unas de otras las partículas de los cuerpos, acrecienta su volúmen y ocasiona una disminucion en su densidad. En el agua se han observado las diferencias siguientes:

Temperatura segun el termómetro centígrado.	*Peso del pie cúbico.* Quintales.
0°..........	 0,47002
2°..........	 0,47015
4°..........	 0,47018
6°..........	 0,47014
8°..........	 0,47010
10°..........	 0,47004
15°..........	 0,46989
20°..........	 0,46935
25°..........	 0,46881
30°..........	 0,46817
50°..........	 0,46434
100°..........	 0,44457

La mayor densidad del agua corresponde á la temperatura de 4°, y las pesas francesas se arreglaron por la condicion de que pesase 1000 kilógramas el metro cúbico á esta temperatura.

Entre la de 0 y 20 grados el pie cúbico español pesa muy próximamente 47 libras. Tomando la pulgada y el quintal por unidades de medida, la densidad del agua será $\frac{\Pi}{g} = 0{,}0000006459$ de la unidad de masa á esta temperatura: la azumbre que consta de $161^{ppp},2$ pesa $4^{lb.},3849$, y la pulgada cúbica $0^{q},000272$ ó 250,69 granos.

El efecto de la compresion sobre la densidad del agua es casi inapreciable; por esto no haremos mencion de él, y miraremos este fluido como incompresible.

4. Se forma idea del *tiempo* por la sucesion de nuestras propias ideas: es una cantidad continua que se concibe for-

mada de elementos consecutivos, á quienes para abreviar llamaremos *instantes*. En este escrito tomaremos el segundo por unidad de su medida.

5. Se dice de un cuerpo que está en *movimiento* cuando en instantes sucesivos muda de lugar, ó se altera su distancia á tres planos que supondrémos rectangulares. La línea recta ó curva descrita por el móvil se concebirá tambien formada de elementos consecutivos, cada uno de los cuales es corrido en el instante correspondiente. Asi consideradas estas cantidades y las otras sometidas á la ley de continuidad que son el asunto de la mecánica, es como se aplica con extremada sencillez el cálculo infinitesimal á las investigaciones de esta ciencia.

6. Sea un cuerpo en movimiento describiendo una línea cualquiera, recta ó curva: al cabo de un tiempo indeterminado t ha corrido una longitud s sobre esta línea, y en el instante siguiente dt corre una porcion de espacio expresada por ds: *esta porcion de espacio andada en dicho instante y referida á la unidad de tiempo* es lo que se llama *la velocidad* del cuerpo en dicha época. Llamando, pues, v esta velocidad, su expresion analítica será el cuarto término de la proporcion

$$dt : 1 :: ds : v$$

ó

$$v = \frac{ds}{dt} \, (*).$$

7. Se llama *fuerza* en general á toda causa del movimiento de un cuerpo, sea que le engendre si el cuerpo está en reposo, sea que le modifique y aun destruya si ya se halla en movimiento.

La naturaleza de las fuerzas nos es completamente desconocida; tambien se ignora el modo con que comunican el movimiento. Lo que se sabe, ó al menos, lo que fácilmente se puede concebir, es que los cuerpos son *inertes*, esto es, que no pasan por sí mismos del reposo al movimiento, ni se acelera ó retarda ó detiene este sin que intervengan agentes exteriores que produzcan estos efectos. Estos agentes, estas causas son las *fuerzas*.

Pero si la esencia y el modo de obrar de las fuerzas estan fuera del alcance de nuestro entendimiento, no es lo mismo de sus efectos. Ellos nos dan los medios de medirlas y de compararlas, y de combinarlas, y de prever los resultados de su combinacion, cualesquiera que sean los cuerpos y el artificio con que esten enlazados.

8. Supóngase un cuerpo de la masa m y una fuerza que

(*) Esta definicion de la velocidad, independiente de toda idea de fuerzas, es exacta y me parece fácil de comprender. La que se ha dado diciendo que es la *relacion del espacio corrido con el tiempo* es demasiado vaga, y no conviene sino al movimiento uniforme.

Si se dice que es el *espacio corrido en la unidad de tiempo*, se recae en el mismo inconveniente. Esta expresion suele usarse sin embargo por evitar perífrasis, pero debe entenderse que es el espacio que correria el móvil en la unidad de tiempo si en todos los instantes (infinitos en número) que componen esta unidad, corriese un espacio igual al que efectivamente corre en el instante que se considera, ó mas breve, si desde esta época fuese uniforme el movimiento del cuerpo.

Acepcion análoga tienen otras notaciones que se dan mas abajo: φ por ejemplo no es el incremento de velocidad por unidad de tiempo, como suele decirse por abreviacion, y como está bien dicho cuando el movimiento es uniformemente variado, sino que es la velocidad que en la unidad de tiempo imprimiría la fuerza si en todos sus instantes imprimiese una velocidad igual á la dv que efectivamente imprime en el instante dt. Lo mismo se entiende de la *masa referida á la unidad de volúmen*, que llamamos *densidad*; de la *presion referida á la unidad de longitud ó de superficie*, y de otras que se usan frecuentemente en el lenguaje de la mecánica.

obra continuamente sobre él y á quien obedece libremente: al cabo de un tiempo t adquirirá el cuerpo la velocidad v. Si cesase entonces la accion de la fuerza, el cuerpo en virtud de su inercia continuaría moviéndose con la misma velocidad v sin que esta velocidad creciese ni menguase. Pero si la fuerza continúa obrando sobre él, cada unidad de su masa estará animada en el instante siguiente dt de la velocidad $v+dv$. El efecto por consiguiente de la fuerza es imprimir á cada unidad de la masa m la velocidad dv en el instante dt; y el *producto de este incremento de velocidad, adquirido en cada instante y referido á la unidad de tiempo, por el número de unidades de masa que contenga el cuerpo*, puede representar la *medida de esta fuerza.*

Este producto es con efecto el que se toma para expresar su magnitud, ó como se dice, su *intensidad.* Llamando φ al incremento, referido á la unidad de tiempo, que adquiere la velocidad del móvil en el instante que se considera, la expresion analítica de este incremento será el cuarto término de la proporcion

$$dt : 1 :: dv : \varphi$$

ó

$$\varphi = \frac{dv}{dt},$$

y la intensidad de la fuerza será

$$m\varphi \quad ó \quad m\frac{dv}{dt},$$

ó tambien si v y s son funciones de t,

$$m\frac{d^2s}{dt^2}. \text{ (*)}$$

(*) Debe saberse que los matemáticos dan al factor φ el nombre de *fuerza variatriz*, y á $m\varphi$ el de *fuerza motriz.* Ambas expresiones son con efecto la medida de las fuerzas, la primera cuando se imprime á un cuerpo cuya masa es la unidad, y la segunda cuando la masa es de cualquier otra magnitud. La denominacion que hemos dado á φ tiene sin embargo la ventaja de recordar su orígen.

A $m\varphi$ se le da tambien, segun se verá mas adelante, el nombre de *cantidad de movimiento impresa al cuerpo en la unidad de tiempo*, ó bien la que el cuerpo *adquiere* en el caso de ceder libremente á su accion. Lo que nunca debe olvidarse es que la idea *de fuerzas variatrices* envuelve siempre el carácter de *continuas* ó el de la continuidad de su accion sobre los cuerpos á que se aplican; por manera que su efecto durante un instante cualquiera, representado por $m\varphi dt$, es infinitamente pequeño, y no llega á ser finito sino despues de haber obrado durante un tiempo finito. Véase lo que se dice mas adelante, número 13, sobre la cantidad de movimiento.

Si el cuerpo de que se trata hubiese tenido una masa doble, triple &c., teniendo que repartirse la fuerza sobre doble, triple &c. número de unidades de masa, solo imprimiria á cada una la mitad, el tercio &c. de la velocidad anterior en el instante considerado, y vice versa; pero el producto de las dos cantidades que es su medida, hubiera sido el mismo.

9. Las ecuaciones

$$v=\frac{ds}{dt} \quad y \quad m\varphi=m\frac{dv}{dt} \quad ó \quad \varphi=\frac{dv}{dt},$$

ó bien las

$$v=\frac{ds}{dt}, \quad \varphi=\frac{d^2s}{dt^2}$$

encierran las circunstancias del movimiento de un cuerpo que cede libremente á la accion de una fuerza. Por su medio se calculan dos de las cuatro cantidades s, t, v, φ cuando se dan las otras dos.

10. Hemos dicho que desde el momento en que cese de obrar la fuerza sobre el cuerpo, continúa este moviéndose con una *velocidad constante.* El movimiento desde esta

época en adelante tiene el nombre de *uniforme*. Las ecuaciones que le pertenecen son

$$\varphi=\frac{d^2s}{dt^2}=0,\quad v=\frac{ds}{dt}=const.;$$

y dan $s=B+vt;$
siendo B la distancia á que se supone hallarse el móvil de un punto fijo dado, al empezar á contarse el tiempo.

11. Si la fuerza que obra sobre el cuerpo es la misma en todos los instantes del tiempo t, φ *es el incremento de velocidad que adquiere el cuerpo en cada unidad de tiempo*, y será constante tambien. El movimiento se llama *uniformemente variado*, y tiene por ecuaciones

$$\varphi=\frac{dv}{dt}=const.,\quad v=\frac{ds}{dt},$$

que dan

$$v=A+\varphi t,\quad s=B+At+\tfrac{1}{2}\varphi t^2;$$

siendo A la velocidad que se supone tenia el móvil antes de empezar á obrar la fuerza, y B la distancia á que estaba de un punto fijo dado al empezar á contarse dicho tiempo.

12. Por último, si la fuerza ó el incremento φ varía con el tiempo ó es funcion de una cantidad variable cualquiera, el movimiento toma el nombre general de *movimiento variado*. Escrita en lengua algebráica la naturaleza de la funcion φ, se sustituirá su valor en las anteriores ecuaciones generales para descubrir despues las circunstancias del movimiento, con tal empero que sea posible efectuar las integraciones.

13. Cualquiera que sea el movimiento de un cuerpo, *al producto de su masa por la velocidad que lleva* se le da el nombre de *cantidad de movimiento*. Asi cuando un cuerpo en virtud de fuerzas cualesquiera ha adquirido al cabo de

un tiempo dado la velocidad v, siendo m su masa, se dice (si antes habia estado en reposo) que le han impreso hasta entonces la *cantidad de movimiento* mv. Esta cantidad viene asi á expresar la fuerza que durante el tiempo t han acumulado sobre él las fuerzas continuas de que se ha hecho mencion y representa en todos los casos la fuerza de que está animado en aquella época (*). Pero esta fuerza infinitamente grande respecto de las variatrices en cualquier instante, no puede compararse sino con otras de la misma especie ó igualmente finitas. Los efectos del choque de los cuerpos se averiguan por medio de esta comparacion, sin hacer aprecio del efecto de las fuerzas variatrices exteriores que actúen sobre cada uno de ellos en el instante en que tiene lugar.

14. Entre las fuerzas que presenta la naturaleza se distinguen

1.° Las fuerzas que producen los seres animados por medio de los músculos del cuerpo.

Estas fuerzas consisten en esfuerzos ó presiones que se ejercen en la superficie de los cuerpos.

2.° Las producidas por las propiedades particulares de algunos cuerpos, entre otras por la elasticidad de los cuerpos sólidos y de los gases. Se ejercen del mismo modo que las anteriores.

3.° Las que produce la pesantez ó gravedad, cuya causa se ignora, aunque esté averiguado que es un caso par-

(*) Por esta consideracion San Pedro en su Mecánica, á la velocidad v, supuesta multiplicada por la unidad de masa, le da el nombre de *fuerza acumulada*; al producto mv el de *fuerza acumulada motriz*, y tambien el de *velocidad motriz*. Cuando mira á v como el efecto de fuerzas instantáneas, segun se indica en el número 18, la llama *fuerza impulsiva*, y á mv *fuerza impulsiva motriz*.

ticular de la ley de atraccion de todos los cuerpos de la naturaleza. Esta atraccion está en razon directa de las masas de estos cuerpos, é inversa de los cuadrados de sus distancias. En esta misma clase de fuerzas comprendemos las que nacen de las atracciones ó repulsiones eléctricas ó magnéticas, del calor &c. La propiedad que las distingue de las clases anteriores consiste en que animan por igual á todas las moléculas de los cuerpos penetrando en su interior, esto es, que aun cuando crezca ó mengüe la masa de estos, no mengua ni crece el incremento de velocidad que adquieren, resultando de aqui que la medida de tales fuerzas es siempre proporcional á la masa de los cuerpos sobre quienes actúan.

15. Entre todas estas fuerzas, aquella cuyas leyes estan mejor averiguadas y que mas nos importa conocer es la *gravedad*. Sin embargo de que su intensidad depende de la distancia vertical de los cuerpos á la superficie del mar y de la latitud del lugar en que se hallan, puede mirarse como constante en un mismo territorio para todos los usos de la mecánica práctica (*). Que ejerce la misma accion sobre cada una de las moléculas de los cuerpos, ya esten en la superficie, ya en su interior, ora sean estos de mucha, ora

(*) Designando por
g el incremento de velocidad que en cada segundo adquieren los cuerpos que caen libremente,
L la latitud del lugar,
h su altura sobre el nivel del mar,
r el radio del esferoide terrestre á dicha latitud y al nivel del mar,
se tiene en pies españoles

$$r = 22848530\,(1 + 0{,}00164 \cos. 2L);$$
$$g = 35{,}1887\,(1 - 0{,}00284 \cos. 2L)\left(1 - \frac{2h}{r}\right).$$

de poca masa, de esta ó de la otra naturaleza, se deduce de la observacion directa; pues cualquiera de ellos que se deje caer en el vacío, corre igual espacio durante el mismo tiempo, y adquiere el mismo incremento de velocidad en cada unidad de tiempo. Asi la medida de la fuerza que la gravedad imprime á un cuerpo estará bien representada por el producto de este incremento de velocidad que llamaremos g por la masa m de este cuerpo, esto es, por mg.

Cuando el cuerpo es mantenido por un obstáculo invencible, ejerce la gravedad sobre él un cierto esfuerzo llamado *presion* que siempre es proporcional á la cantidad de materia que contiene, y puede medirse con exactitud por medio de balanzas ó instrumentos análogos. Estas presiones cuyas intensidades son conocidas con el nombre de *pesos*,

En Madrid, cuya latitud es de 40° 25′ 6″ y su altura sobre el nivel del mar $h = 2394^p$, resulta

$$r = 22854500^p$$
$$g = 35^p,1665; \quad \log. g = 1{,}5461292;$$

y en pulgadas españolas

$$g = 422^p \qquad \log. g = 2{,}6253117.$$

En Santander $L = 43°\ 25'$; $h = 0$; $g = 35^p,182 = 422^p,184$.
En Cádiz...... $L = 36°\ 31'$; $h = 0$; $g = 35^p,16 = 421^p,914$.
En la Habana $L = 23°\ 12'$; $h = 0$; $g = 35^p,12 = 421^p,44$.
En Manila.... $L = 14°\ 36'$; $h = 0$; $g = 35^p,101 = 421^p,22$.
En Méjico.... $L = 20°\ 2'$; $h = 8172$; $g = 35^p,087 = 421^p,04$.

En la aplicacion de las fórmulas en que entre la gravedad, y de esta circunstancia gozan la mayor parte de las contenidas en el presente escrito, deberá cuidar el ingeniero de formar por la anterior regla el valor de g que convenga al lugar en que se halle, asi como el de sus funciones mas usuales $\sqrt{2g}$ y $\frac{1}{2g}$.

Para ahorrarle parte del trabajo se apuntan á continuacion los logaritmos constantes:

log. 22848530 = 7,3588583; log. 35,1887 = 1,5464032;
log. 0,00164 = 7,2148438; log. 0,00284 = 7,4533183;

se comparan y aun se valúan numéricamente refiriéndol á la unidad de peso, al quintal por ejemplo. Llamando el número de quintales á que equivale el peso del cuer cuya masa es m, ó la presion que ejerce sobre un obstácu puesto por debajo, P será tambien la medida de la fuer que la gravedad imprime á este cuerpo.

Se tienen, pues, dos medidas mg y P de una misn fuerza, la una para cuando el cuerpo le cede libremente, la otra para cuando es detenido por un obstáculo. Con mira de tener la facultad de reemplazar la una por la otı cuando acomode, se hará que ambas representen el mism número de unidades, disponiendo de la magnitud de la un dad de masa (lo cual está á nuestro arbitrio), de suerte qu se verifique esta igualacion. Esto es lo que se ha hecho e el núm. 2. Se tendrá asi $P=mg$ en la inteligencia d que quedarán fijadas en los cálculos que se hagan las un dades de longitud y de peso. Ambos miembros vendrán e presados en unidades de fuerza; pero si se quiere simple mente la magnitud relativa de varias, no hay inconvenien te en representarlas por números abstractos, por líneas por cualesquiera cantidades que les sean proporcionales. L representacion por líneas es muy cómoda porque expresa por su longitud la intensidad de las fuerzas y por su direc cion el sentido en que obran. Tambien es muy socorrid esta representacion para explicar muchas propiedades me cánicas por consideraciones puramente geométricas.

16. Lo que acaba de decirse de la gravedad se deb entender igualmente de las otras fuerzas que como las d los seres animados, las de la elasticidad de los gases &c. solamente obran sobre las superficies de los cuerpos. La presiones que ejercen sobre estas son siempre equivalente á los pesos que den su medida. Si una de estas fuerzas ejer

ce, por ejemplo, sobre un obstáculo inmóvil una presion P', puede deducirse que distribuida su accion en todas las moléculas de un cuerpo de la masa m' que le ceda libremente, le imprimiria un movimiento uniformemente acelerado tal, que la velocidad g' adquirida en cada unidad de tiempo seria igual á $\frac{P'}{m'}$. Recíprocamente, si se sabe que cediendo libremente un cuerpo de la masa m' á la accion de una fuerza, adquiere en cada unidad de tiempo un incremento g' de velocidad, se deducirá que en el caso de obrar la fuerza contra un obstáculo *inmóvil* ejerceria sobre él una presion P' que seria igual á $m'g'$.

Hemos dicho *contra un obstáculo inmóvil*; porque si en vez de ser fijo se moviese hácia adelante en la direccion de la fuerza con un movimiento uniformemente acelerado en que el incremento de velocidad por unidad de tiempo fuese g'', la presion ejercida por la fuerza contra este cuerpo no seria como antes $m'g'$, sino solamente $m'(g'-g'')$; de suerte que se tendria

$$P'=m'(g'-g'').$$

Segun las unidades de tiempo, de longitud y de peso que hemos adoptado, la unidad de fuerza viene á ser la que ejerceria sobre una superficie fija una presion equivalente al peso de un quintal, ó la que ejerceria la gravedad sobre un cuerpo que pesase un quintal y cayese libremente, ó en fin la que aplicada á un cuerpo cuya masa fuese la unidad, tal como el indicado en el núm. 2, y le cediese libremente, le imprimiria en cada segundo la velocidad de una pulgada.

Una fuerza de 10 unidades, por ejemplo, ejerceria una presion de 10 quintales, ó haria adquirir á un cuerpo de 5 unidades de masa un incremento de velocidad de 2 pul-

gadas por segundo, ó á un cuerpo de una masa dada un incremento de velocidad por segundo tal que su producto por dicha masa seria igual al número 10 (*).

17. Hemos llamado *cantidad de movimiento* al producto de la masa de un cuerpo por la velocidad que lleva. Por analogía se dice tambien que una fuerza $P=mg$ es capaz de imprimir á un cuerpo de la masa m una cantidad de movimiento mg en cada unidad de tiempo, ó bien una cantidad de movimiento $mgdt$ ó Pdt en un instante dt.

18. En el núm. 10 quedó establecido el movimiento uniforme por la condicion de haber cesado la accion de la fuerza en el instante que precedió al principio de este movimiento. Lo mismo resultará concibiendo que á la fuerza que habia acompañado al cuerpo hasta aquel instante se sustituye otra que obrando solamente en aquel instante mismo, es capaz de imprimirle la misma velocidad. Estas fuerzas que obran asi sobre el móvil durante un solo instante ó en un tiempo muy corto, son llamadas fuerzas *instantáneas* ó *impulsivas*. Como quiera que sea, en las cuestiones en que se trata de examinar las circunstancias del movimiento de un cuerpo sujeto á fuerzas continuas, y que se hallaba ya en movimiento antes de sufrir la accion de estas fuerzas, nada importa la mayor ó menor duracion de los impulsos á que es debido este movimiento

(*) Cuando las fuerzas son proporcionales á las superficies sobre quienes actúan, y esto sucede frecuentemente, suele tomarse el peso de la atmósfera por unidad de su medida. Siendo de $32\frac{2}{3}$ pulgadas españolas la altura ordinaria del mercurio en el barómetro y pesando $0^q,0037$ cada pulgada cúbica de este líquido, la presion atmosférica equivale á $0^q,121$ ó próximamente á 12 libras por pulgada cuadrada. Asi una presion de un quintal por pulgada cuadrada vale tanto como la de 8,26 ó poco mas de $8\frac{1}{4}$ atmósferas.

anterior al que se cuenta. La velocidad que lleva el móvil al empezar la accion de las fuerzas continuas es llamada *velocidad inicial ó de proyeccion*, y puede mirarse como producida por estas fuerzas instantáneas. Las fuerzas continuas, aunque en cada instante no producen sino efectos infinitamente pequeños, modifican sin cesar esta velocidad ya aumentándola, ya aminorándola por grados insensibles, de suerte que al cabo de un tiempo dado resultará alterada en una cantidad finita; y lo que se dice de la magnitud de la velocidad debe entenderse tambien de la direccion, cuando las fuerzas no obran en el sentido del movimiento inicial del cuerpo, proviniendo de esta continuidad de variaciones infinitamente pequeñas la línea curva que describe.

Asi, por ejemplo, cuando una bomba sale de la boca de un mortero en virtud de la elasticidad de los gases producidos por la pólvora, la velocidad que lleva es la que llamamos inicial; pero desde aquel mismo instante está sometida á una fuerza continua directamente opuesta, la resistencia del aire, que amengua sin cesar esta velocidad; y á otra fuerza tambien continua, la gravedad, que poco á poco la hace cambiar de direccion hasta el punto de hacer que siga la suya propia, ademas de amortiguar su velocidad mientras sube la bomba y de acrecentarla despues indefinidamente cuando desciende.

19. En todo lo que va dicho antes del número anterior solo se ha considerado una fuerza constante ó variable obrando sobre un solo cuerpo; y para poder comparar las intensidades de varias fuerzas y establecer su medida, ha sido ademas necesario suponer este cuerpo enteramente libre de cualesquiera otras, y susceptible de ceder dócilmente á la que se le aplicaba. En la realidad nunca sucede esto; todos los cuerpos de la naturaleza y aun las partículas de

3

un mismo cuerpo estan sometidos simultáneamente á varia fuerzas, y bien pequeña seria la utilidad de estas investigaciones si no se examinase el efecto que producen mucha fuerzas aplicadas á un mismo punto ó á diversos puntos de un cuerpo, ó tambien á diversos cuerpos ligado entre sí de una manera que nos sea conocida. Estas fuerzas estos puntos, ó estos cuerpos por ellas solicitados forman l que se llama un *sístema.*

20. No siendo mi ánimo escribir mas nociones que la precisas para entrar con facilidad en el estudio de este li bro, pasaré desde luego á tratar del caso general de un sistema de cuerpos enlazados entre sí de un modo invariabl ó segun una ley determinada, y sometido cada uno á un ó muchas fuerzas constantes ó variables con el tiempo.

En virtud del enlace del sistema, el movimiento de cad cuerpo solamente puede verificarse para cada instante e direcciones determinadas sea en un sentido ó en sentido con trario, y es necesario examinar para cada uno: 1.° la magnitud de la fuerza que le esté aplicada: 2.° su direccion el sentido en que obra segun ella: 3.° la mayor ó meno tendencia al movimiento de que goza con relacion á lo otros el cuerpo de que se trata segun su posicion en el sistema, esto es, el espacio relativo que necesariamente tien que correr en el instante dado, espacio que será mayor menor que el descrito por los otros durante el mismo ins tante, no por causa de las fuerzas que actúen sobre él, sin solamente por la situacion que ocupa entre los demas de sistema.

21. Para fijar las ideas sobre lo que acaba de decirse sobre los razonamientos que van á hacerse, refirámonos un ejemplo sencillo.

Sean dos cuerpos de las masas m y m', fig. 1, sometido

respectivamente á las fuerzas verticales P y P' ó mg y $m'g'$. Ambos penden de dos hilos arrollados á círculos fijados en un plano que solo puede moverse girando al rededor del eje fijo O. Se prescinde de la inercia del plano ó placa, del rozamiento del eje, del peso y rigidez de las cuerdas, no considerando estos objetos sino como medios de enlace de los puntos a y a' de aplicacion de las fuerzas P y P' ó mg y $m'g'$ en una época dada del movimiento. Se supone trascurrido un tiempo t al cabo del cual en virtud de la accion de las fuerzas, han corrido los cuerpos m, m' los espacios s, s', y andan en el instante siguiente dt los espacios ds, ds'.

Si obrase sola cualquiera de las dos fuerzas P ó P', el cuerpo m ó m' se moveria verticalmente con un movimiento acelerado en que el incremento de velocidad por segundo seria g ó g', y este movimiento determinaria absolutamente el de todos los demas puntos del plano ligados con el de aplicacion a ó a' de la fuerza. Suponiendo, por ejemplo, que ambas fuerzas procedan de la gravedad y que sean iguales las masas m y m', lo que da $P=P'$ ó $mg=m'g'$, la aplicacion de la fuerza P produciria al punto a un incremento de velocidad de 422^p por segundo, y si Oa fuese la mitad de Oa', el incremento de velocidad por segundo del punto a' seria de 844^p; por el contrario, aplicando sola la fuerza P', el incremento de velocidad de a' seria de 422^p mientras que el de a no seria sino de 211^p. Pero cuando las dos P y P' obran simultáneamente, el movimiento de los dos puntos a, a' de aplicacion no se verifica como en ninguno de los dos casos anteriores, porque la accion de una de las fuerzas modifica la de la otra en virtud del recíproco enlace de dichos puntos.

Esto hace ver que los efectos de las dos fuerzas sobre el sistema no estan simplemente en la razon de las magni-

tudes P, P' de las fuerzas, sino que dependen ademas de la posicion de sus puntos de aplicacion a, a'. Como quiera que se verifique el movimiento, sea cual fuere la magnitud de las fuerzas, es tal el enlace de estos dos puntos, que si el a corre en el instante de que se trata el espacio elemental ds, necesariamente el otro a' ha de andar en el mismo instante un espacio ds' que tendrá con ds una relacion fija y determinada por la naturaleza del sistema. Si, por ejemplo, la distancia Oa' es doble ó triple de Oa, el espacio ds' corrido en el mismo instante que ds será doble ó triple de este por sola esta razon. Asi, pues, la relacion entre los elementos ds, ds' viene á expresar la relacion entre la tendencia ó disposicion para el movimiento que por sí mismos tienen los puntos en aquella época, la relacion, digámoslo asi, entre la actividad natural, entre la virtud propia para el movimiento de que cada uno por la posicion que ocupa está dotado. Si por consiguiente el espacio ds' es doble ó triple del ds, parece evidente que el efecto de la fuerza P' en el movimiento del sistema será por esta consideracion doble ó triple del efecto de la otra.

Combinando ahora las dos razones de intensidad de las fuerzas y de disposicion ó tendencia para moverse de sus puntos de aplicacion, se deducirá que los efectos de las dos (efectos á que llamaremos *cantidades de accion* para distinguirlos de los que ejercen sobre los cuerpos libres y que dan su medida) durante el tiempo dt estarán en razon compuesta de sus magnitudes y de los espacios ds, ds' corridos en este instante por los puntos respectivos de aplicacion. Y puesto que ambas fuerzas obran en un mismo sentido, la cantidad de accion total en dicho instante será proporcional á la suma de las dos cantidades de accion parciales

$$P\,dt\,ds,\quad P'\,dt\,ds',$$

ó suprimiendo el factor comun dt, á

$$P\,ds + P'\,ds'.$$

Si las dos actuasen en sentido contrario una de otra, lo que sucederia por ejemplo hallándose en A' el punto de aplicacion de la fuerza P', la cantidad de accion producida seria proporcional á

$$P\,ds - P'\,ds',$$

y nula si esta diferencia fuese igual á cero. Entonces se dice que las dos fuerzas estan *en equilibrio* (*).

(*) Si valiese por demostracion la explicacion razonada que acaba de hacerse sobre la medida de la accion mecánica de las fuerzas en todas sus combinaciones y sobre el consiguiente principio de los momentos, de ella podria deducirse con suma sencillez el del paralelógramo de las fuerzas. Supóngase el punto de aplicacion de la fuerza P en cualquier otro parage M de su direccion: con tal que este punto M esté invariablemente unido con el a, el efecto de dicha fuerza debe ser evidentemente el mismo y representarse por Pds como antes; pero llamando

s'' el espacio corrido por M al cabo del tiempo t,
r'', r los radios OM, Oa,
α el ángulo MOa, igual al PMQ que forma la direccion de la fuerza con la tangente MQ ó con el elemento ds'',

se ve que el espacio corrido por el punto de aplicacion M en el mismo instante dt es ds''; que la relacion $\frac{ds''}{ds}$ es igual á la de los radios $\frac{r''}{r}$, que por ser $r = r''\cos.\alpha$, se tiene tambien $ds = ds''\cos.\alpha$, y por último que la cantidad de accion que antes era Pds puede representarse por $Pds''\cos.\alpha$. Obsérvese ahora que este producto tanto viene á ser el de la fuerza P por la proyeccion $ds''\cos.\alpha$ del espacio corrido en el tiempo dt sobre su direccion, como el producto de una fuerza $P\cos.\alpha$ tomada en el sentido de la tangente á la curva por dicho elemento ds''. Asi, pues, una fuerza Q cuya magnitud fuese igual á $P\cos.\alpha$ y cuya direccion fuese la de la curva produce el mismo efecto en el sistema que la fuerza dada P, y si se aplicase en sentido contrario se equilibraria con ella.

De aqui ya es fácil pasar á la proposicion enunciada; porque en primer lugar el resultado á que hemos llegado, independiente del valor de ds'' que es el mismo para ambas fuerzas P y Q, se aplica de igual

Por último, si ambas ó cualquiera de ellas, fig. 2, no obrasen en el sentido de las tangentes á las curvas en los puntos a, a', ó lo que es lo mismo, en el sentido de los arcos ds, ds', solo se deberán tomar las componentes de estas fuerzas en el sentido de estos arcos, de suerte que llamando α, α' los ángulos que en el instante dado forman sus direcciones con las de los arcos ds, ds' (*), las cantidades de accion respectivas son proporcionales á

$$P\cos.\alpha ds\,,\ P'\cos.\alpha' ds',$$

y la cantidad de accion total á

$$P\cos.\alpha ds + P'\cos.\alpha' ds'$$

durante el instante dt. Las otras componentes P sen. α perpendiculares á la curva no tienen influencia alguna por sí mismas en el movimiento ni para favorecerle ni para impedirle. Producirán sí un rozamiento en el eje; y si se quisiere contar con él, se considerará como una nueva fuerza aplicada tangencialmente al punto en que se ejerce, valuando de la misma manera su cantidad de accion para restarla de las cantidades de accion debidas á las fuerzas en cuyo sentido prevalezca el movimiento; pero aqui prescindimos de esta y de todas las fuerzas pasivas, asi como de las que puedan nacer de las acciones mútuas de los cuerpos.

Puede observarse que si los ángulos α se cuentan constantemente hácia un mismo lado desde las direcciones de

modo cualquiera que sea la curvatura de la curva en el punto M y aun cuando sea nula ó se convierta en una línea recta: en segundo lugar debe observarse que si el efecto producido sobre el punto M es el debido á sola la componente $P\cos.\alpha$ tomada en el sentido de la curva, es porque existe otra componente en el sentido de la normal cuyo valor calculado por el mismo principio es P sen. α y cuyo efecto es nulo por ser destruida por la curva, supuesta inflexible. En tercer lugar sea un cuerpo libre sometido simultáneamente á dos fuerzas P, P' cuyas direcciones formen entre sí el ángulo θ: en el instante que sigue al tiempo t y despues de andado el espacio s no puede moverse sino en una sola direccion y correr mas espacio elemental que el único ds situado en el plano de las fuerzas: esta direccion debe ser tal que las componentes de las dos fuerzas estimadas en el sentido de su normal se destruyan la una á la otra, ó sean iguales y directamente contrarias. Llamando α, α' los ángulos de las dos fuerzas con dicho arco elemental, esta condicion se expresa por la ecuacion

$$P\,\text{sen.}\,\alpha = P'\,\text{sen.}\,\alpha',$$

ó

$$\frac{\text{sen.}\,\alpha}{\text{sen.}(\theta-\alpha)} = \frac{P'}{P}$$

que dará la direccion que sigue el cuerpo en aquel instante. Esta direccion no depende como se ve de la magnitud, sino de la relacion de las magnitudes de las fuerzas.

La accion producida por las dos es segun lo dicho anteriormente

$$P\cos.\alpha ds + P'\cos.\alpha' ds \quad \text{ó} \quad (P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha')\,ds,$$

y es igual á la que producirá la sola fuerza

$$P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha.$$

Reuniendo los dos resultados y expresándolos gráficamente, se ve que tanto en direccion como en magnitud las dos fuerzas P y P' pueden reemplazarse por una sola representada en ambos conceptos por la diagonal del paralelógramo que ellas forman.

En resúmen lo que distingue del general el caso de considerarse un solo cuerpo, es que no siendo posible se mueva á un tiempo mas que de una sola manera, la cantidad ds es un factor comun de todos los términos que expresan las acciones de las fuerzas. Lo que distingue el caso de ceder libremente el cuerpo á la accion de las fuerzas del caso en que tiene que moverse sobre una curva dada ó sobre una superficie dada, es que en lugar de destruirse por la curva ó superficie las componentes normales, se destruyen todas por necesidad entre sí. Esta última condicion da el ángulo α ahora desconocido que una de las fuerzas forma en cada instante con la direccion del móvil, y por consiguiente todos los demas. Véase en el núm. 40 la solucion general de este problema.

(*) Si en vez de los ángulos α fuesen dados el que forma la direccion de cada fuerza con su proyeccion sobre el plano ó placa y el de esta proyeccion con la tangente en a ó a', es sabido que cos. α es igual al producto de los cosenos de estos últimos ángulos.

las fuerzas á los elementos ds, ds' descritos por los puntos de aplicacion, los signos de los cosenos indicarán por sí mismos cuales de las fuerzas conspiran en un mismo sentido, y cuales en sentido contrario de las primeras. Si no se quiere tener esta atencion ó cuando los ángulos no aparecen, se podrán afectar del signo $+$ los términos en que las fuerzas actúan hácia el lado en que se supone verificarse el movimiento, y del signo $-$ á los otros.

22. Volviendo ya al caso general propuesto en el núm. 20, sean

P, P', P''... las fuerzas que obran en el sistema;

m, m', m''... las masas de los cuerpos respectivos á quienes estan aplicadas;

g, g', g''... los incrementos de velocidad que por unidad de tiempo les comunicarian las fuerzas segun sus direcciones respectivas, si les cediesen libremente;

s, s', s''... los espacios corridos por los cuerpos m, m', m''... ó por los puntos de aplicacion al cabo del tiempo t en virtud del movimiento del sistema;

$\alpha, \alpha', \alpha''$... los ángulos que las direcciones de las fuerzas forman con los elementos ds, ds', ds''... de los espacios descritos por su punto de aplicacion respectivo en el instante que sigue al tiempo t;

v, v', v''... las velocidades de que en virtud del movimiento del sistema estan animados los cuerpos al cabo de este tiempo.

Repitiendo para cada fuerza el anterior razonamiento, se hallará: que solo deberá tomarse como influyente en el movimiento la componente $P\cos.\alpha$ tomada en la direccion del elemento ds de la curva descrita por su punto de aplicacion al fin del tiempo t; que la cantidad de movimiento que en el instante siguiente dt es capaz de imprimir al cuerpo es $P\cos.\alpha\, dt$; y por último que su efecto relativo en el movimiento del sistema ó su cantidad de accion durante este instante es $P\cos.\alpha\, dt\, ds$. Asi, pues, la cantidad de accion producida en este instante por todas las fuerzas del sistema es

$$P\cos.\alpha\, dt\, ds + P'\cos.\alpha'\, dt\, ds' + \&c.,$$

entendiéndose incluidas en el &c. las cantidades de accion procedentes de las fuerzas pasivas, ó de las que engendren las acciones recíprocas de los cuerpos, bien que estas últimas vendrán á quedar naturalmente destruidas entre sí en virtud de esta misma reciprocidad.

Por otra parte, habiendo corrido los cuerpos $m, m', \ldots$ los espacios $s, s' \ldots$ durante el tiempo t en virtud de las fuerzas del sistema y corriendo en el instante dt los espacios $ds, ds' \ldots$, debe repararse que estos cuerpos se mueven como si cediesen libremente á fuerzas cuyas medidas segun se vió en el núm. 8 son respectivamente $m\frac{d^2s}{dt^2}$, $m'\frac{d^2s'}{dt^2} \ldots$ De esta consideracion se deduce que la accion total de las fuerzas del sistema en el instante dt tiene ademas otra expresion analítica que es la suma de las cantidades de accion correspondientes á estas últimas fuerzas, y cuyo valor calculado conforme al raciocinio hecho por las otras es

$$m\frac{d^2s}{dt^2}\,dt\,ds + m'\frac{d^2s'}{dt^2}\,dt\,ds' + \&c.$$

Igualando por consiguiente estos dos valores de la accion total de las fuerzas dadas, se tiene

$$m\frac{ds\,d^2s}{dt^2} + m'\frac{ds'\,d^2s'}{dt^2} + \&c. = P\cos.\alpha\, ds + P'\cos.\alpha'\, ds' + \&c.$$

ó teniendo presente que $P=mg$; $P'=m'g'$, &c.,

$$m\frac{dsd^2s}{dt^2}+m'\frac{ds'd^2s'}{dt^2}+\&c.=mg\cos.\alpha ds+m'\cos.\alpha' ds'+\&c.$$

23. Integradas estas ecuaciones, recordando que

$$\frac{ds^2}{dt^2}=v^2,\ \frac{ds'^2}{dt^2}=v'^2,\ \&c.,\ \text{dan}$$

$$mv^2+m'v'^2+\&c.$$
$$=2\left(\int P\cos.\alpha ds+\int P'\cos.\alpha' ds'+\&c.\right)+\text{const.};$$

ó

$$=2\left(\int mg\cos.\alpha ds+\int m'g'\cos.\alpha' ds'+\&c.\right)+\text{const.}:$$

la constante se determinará en cada caso particular por los valores conocidos que en una época dada tengan los demas términos de la ecuacion.

Si se toman dos épocas T y t del movimiento, al cabo de las cuales corra cada cuerpo los espacios S y s, S' y s' &c., y adquiera las velocidades V y v, V' y v' &c.; se establecen dos ecuaciones semejantes á cada una de las últimas, y se restan una de otra; la constante desaparecerá, quedando la ecuacion

$$m(V^2-v^2)+m'(V'^2-v'^2)+\&c.$$
$$=2\left(\int_s^S P\cos.\alpha\, ds+\int_{s'}^{S'} P'\cos.\alpha'\, ds'+\&c.\right);$$

ó

$$=2\left(\int_s^S mg\cos.\alpha\, ds+\int_{s'}^{S'} m'g'\cos.\alpha' ds'+\&c.\right):$$

cualquiera de ellas representa las circunstancias del movimiento de un sistema de cuerpos sometidos á fuerzas cualesquiera.

24. Las expresiones de la forma $\int P\cos.\alpha\, ds$ y mv^2

que se encuentran á menudo en los cálculos de la mecánica tienen en ella nombres especiales que conviene hacer conocer.

La primera $\int P\cos.\alpha\, ds$ ó $\int mg\cos.\alpha ds$, observando que $ds\cos.\alpha$ representa la proyeccion del espacio ds sobre la direccion de la fuerza, expresa la *integral de los productos de dicha fuerza por el espacio, estimado en el sentido de la misma, que el cuerpo ha recorrido en un tiempo dado* y lleva el nombre que ya habiamos dado á su diferencial de *cantidad de accion* ó *cantidad de trabajo* impresa al cuerpo por la fuerza.

25. Á una expresion del mismo nombre y naturaleza conduce la valuacion numérica de la accion de los motores y del trabajo que producen en las máquinas. La accion de los motores consiste en una presion que se ejerce sobre un cuerpo en movimiento. Cuanto mayor sea esta presion y mayor el espacio andado en su sentido por el cuerpo en un tiempo dado, tanto mayor será la accion del motor. Si al punto de aplicacion de la fuerza se ata un hilo en el sentido de su direccion, y haciéndole pasar por una polea fija se suspende en su extremo un peso igual á dicha presion, el descenso de este peso reemplazará bajo todos respetos á la accion del motor, la cual será estimada en razon compuesta del peso sustituido y de la altura que en un tiempo dado haya descendido. Pero un peso P que baja cierta altura p, es capaz de hacer subir por medio de una polea un peso igual á una altura igual. Luego la accion del motor durante un tiempo dado es siempre equivalente á la elevacion de un peso, igual á la presion P ejercida sobre el punto de aplicacion de la fuerza, á una altura igual al espacio p que

corre durante el mismo tiempo en el sentido de su direccion el expresado punto.

Tomando, pues, la pulgada y el quintal por unidades de medida, el efecto de un motor ó su cantidad de accion estará bien representado por P quintales levantados á p pulgadas de altura, ó lo que es lo mismo, por Pp quintales levantados á una pulgada de altura, ó tambien si se quiere, por un número de quintales levantados á otro número de pulgadas con tal que el producto de estos dos números sea Pp. Cuando un número expresa asi una cantidad de accion, es costumbre ponerle á guisa de exponentes las iniciales qp para que recuerden esta significacion (*).

Lo que acaba de decirse de la accion de los motores se entiende igualmente del trabajo efectuado por las máquinas. Por variadas que sean las operaciones de estas, siempre se

(*) Una kilógrama levantada á un metro de altura equivale á $0^{qp},93605$; su logaritmo es 9,9713001.

El caballo de vapor hipotético adoptado como unidad por los ingleses para valuar la fuerza de las máquinas, que segun Watt es de 560 libras *avoir du poids* levantadas á 1 pie ingles en cada segundo, equivale á

$$71^{qp},046\ldots \text{log.} = 1,8515419$$

El caballo de vapor frances, que es de 75 kilógramas levantadas á un metro por segundo, es un poquito menor y equivale á

$$70^{qp},204\ldots \text{log.} = 1,8463614.$$

Si se toma el pie español por unidad de medida se tiene

$1^{km} = 0^{qp},078$. log. = 8,8921185;

1 caballo de vapor ingles $= 5^{qp},92$. . . log. = 0,7723603;

1 caballo frances de vapor $= 5^{qp},85$. . . log. = 0,7671798.

Se puede tomar por *caballo español de vapor* el que equivalga á seis quintales levantados á 1 pie en cada segundo, ó bien $= 6^{qp}$. Resultará $\frac{1}{77}$ mayor que el ingles, y $\frac{1}{40}$ mayor que el frances, de suerte que 77 caballos españoles equivaldrán á 78 ingleses, y 40 de los primeros á 41 franceses próximamente.

reducirá la valuacion de su trabajo á la medida del esfuerzo que tiene que hacer la máquina para ejecutarle. Este esfuerzo y el espacio corrido por el punto de aplicacion en el sentido en que actúa, son aqui lo mismo que eran sobre la máquina el esfuerzo del motor y el espacio corrido por su punto de aplicacion.

Si la presion P no es constante sino que varía segun el espacio s cos. α corrido en su sentido por el punto de aplicacion, la cantidad de accion del motor se expresará por la integral $\int P\, ds \cos. \alpha$ semejante, ó de la misma especie y forma que la citada en el núm. 24 (*).

26. Á la otra expresion mv^2, que es el *producto de la masa m de un cuerpo por el cuadrado de la velocidad v* que lleva, han convenido los mecánicos en llamarla *fuerza viva* de este cuerpo. Si se reemplaza á m por su equivalente $\frac{P}{g}$ siendo P el peso del cuerpo, la expresion mv^2 se convierte en $P\frac{v^2}{g}$ ó en el producto de una presion por una línea, cantidad de la misma especie que la que acabamos de apellidar cantidad de accion (**).

(*) Á la cantidad de accion dan los ingleses el nombre de *potencia mecánica* (*mecanick power*); Daubuisson el de *fuerza dinámica*, y aun solamente el de *fuerza*; Monge el de *efecto dinámico*; Carnot el de *momento de actividad* sin duda por la notable analogía que tiene con los momentos (*véase el núm.* 29); Coriolis el de *cantidad de trabajo*, ó simplemente el de *trabajo*.

(**) Puede observarse que $\frac{v^2}{g}$ representa el doble de la altura de donde debe caer un cuerpo pesado para adquirir la velocidad v. Por esta razon da Coriolis el nombre de fuerza viva á $\frac{mv^2}{2}$ ó á la mitad de lo que

27 Traduciendo ahora las dos últimas ecuaciones del número 23, nos dicen: que en el movimiento de un sistema de cuerpos enlazados entre sí de un modo cualquiera, *la suma de las fuerzas vivas adquiridas por todos los cuerpos en el intervalo de dos épocas sucesivas es igual al doble de la suma de las cantidades de accion impresas por las fuerzas durante el mismo intervalo.* Esta interesantísima proposicion, fundamento de la mayor parte de las aplicaciones de la mecánica, y en particular de las que sirven de objeto al presente libro, es conocida con el nombre de *principio de la conservacion de las fuerzas vivas.* Su escritura abreviada, designando por el índice Σ la suma de términos semejantes, uno por cada cuerpo del sistema, es

$$\Sigma m(V^2-v^2)=2\Sigma\int_s^S P\ \cos.\alpha\ ds\,,$$

ó

$$=2\Sigma\int_s^S mg\ \cos.\alpha\cdot ds.$$

Si se repara la forma del segundo miembro de esta ecuacion, se reconoce que no puede integrarse, ni de consiguiente ser aplicado con fruto el principio de que se trata, á no ser independientes del tiempo ó de la velocidad las condiciones del enlace del sistema, y entre ellas la magnitud y la direccion de las fuerzas. Y con efecto, en no siendo asi, seria forzoso para efectuar la integracion sustituir en vez del tiempo ó de la velocidad sus valores en funcion del arco s

todos han llamado hasta ahora con el mismo nombre. Este cambio de significacion para una misma palabra, de que avisamos para cuando se lean los escritos de tan distinguido ingeniero, aumenta el embrollo de la nomenclatura mecánica, ya demasiado complicada y seguramente no muy propia.

corrido por cada cuerpo, y esto supone ya resuelto el problema.

Afortunadamente ni en las fuerzas que nos presenta la naturaleza, ni en las que se emplean en las máquinas ocurre este inconveniente. Aquellas son siempre funciones muy sencillas de las distancias de los cuerpos á centros fijos y sus direcciones son segun las rectas que miden estas distancias. Estas, ó son constantes, y constante tambien el ángulo que sus direcciones forman con los elementos ds descritos por sus respectivos puntos de aplicacion; ó si varían, pueden siempre expresarse en funciones independientes del tiempo tanto su magnitud, como su direccion.

28. Examinando la misma ecuacion, y tomando dos épocas consecutivas ó inmediatamente próximas, se observa que si la suma de las cantidades de accion producidas por las fuerzas en este instante se reduce á cero, la suma de las fuerzas vivas del sistema se conserva constante, lo que anuncia en general un movimiento uniforme; esto equivale á decir que no alterándose la velocidad del sistema, ni saliendo del estado de reposo si al principio le habia gozado, las fuerzas no ejercen en él ninguna influencia, y por consiguiente se destruyen recíprocamente. Entonces se dice que las fuerzas del sistema estan *en equilibrio* en aquel instante. Igualando, pues, á cero el segundo miembro de una de las anteriores ecuaciones, y suprimiendo el signo integral, la condicion de este equilibrio es

$$\Sigma P\ \cos.\alpha\ ds=0,$$

ó que la suma de las cantidades de accion elementales ejercidas por las fuerzas en cada instante se reduzca á cero.

El movimiento uniforme que se observa en el agua de los canales cuando su seccion y pendiente son las mismas en toda su longitud, proviene de este equilibrio entre la fuer-

za constante de la gravedad que obra sobre la masa fluida y las fuerzas pasivas nacidas de la adherencia de sus moléculas á las paredes del canal: estas últimas fuerzas, nulas al principio del movimiento, crecen rápidamente hasta equilibrarse con dicha fuerza constante, y entonces se hacen ellas constantes tambien. Efecto análogo tiene lugar en las máquinas entre la accion del motor por una parte, y por la otra el trabajo útil producido y las acciones debidas al rozamiento y demas fuerzas pasivas.

29. Si desde el principio se halla el sistema en reposo y las fuerzas se equilibran desde este primer instante, no teniendo lugar ninguna cantidad de accion, ni siendo realmente descritos los espacios s, s'... cuyos elementos hemos representado por ds, ds'..., parece á primera vista que no puede aplicarse á este caso el anterior teorema. Pero observando que en la ecuacion

$$P \cos. \alpha\, ds + P' \cos. \alpha'\, ds' + \&c. = 0$$

cuyos términos tienen todos la misma forma, lo que nos importa averiguar no es tanto la magnitud de los espacios ds, ds'... como la relacion de unos con otros, y que esta relacion, segun lo visto en el núm. 21, no depende en manera alguna de las fuerzas, sino solamente de la posicion respectiva de los puntos en el sistema que forman y del modo con que estan enlazados unos con otros, basta dar un impulso ó concebir que efectivamente le recibe el sistema y examinar los espacios que en un instante correrían los puntos de aplicacion de las fuerzas, para obtener la relacion buscada. Y con efecto, de cualquiera manera que haya sido comunicado este impulso, ninguno de los puntos podrá moverse sino en direcciones determinadas por la naturaleza del enlace de unos con otros y de todos ellos con puntos fijos si los hay. El espacio infinitamente pequeño descrito por el cuerpo m, por ejemplo, podrá ser mayor ó menor segun la intensidad del impulso; pero una vez fijada su longitud, cualquiera que esta sea, las longitudes asi como las direcciones de los espacios corridos simultáneamente por los demas cuerpos quedarán irrevocablemente determinados á causa del enlace del sistema. Estos espacios infinitamente pequeños, llamados *velocidades virtuales* de los puntos de aplicacion de las fuerzas, representan pues tan bien y aun mas generalmente que los espacios ds, ds' corridos efectivamente, las tendencias relativas al movimiento de que estos puntos por su posicion estan dotados, *y sus productos por las intensidades de las fuerzas estimadas en su direccion*, ó lo que es lo mismo, *los productos de las fuerzas por las proyecciones de las velocidades virtuales sobre su direccion*, productos á quienes se da el nombre de *momentos virtuales*, ó simplemente el de *momentos*, representan igualmente que las cantidades de accion, la energía relativa de cada fuerza, ó la influencia que le cabe en el efecto total. Reemplazando pues en la última ecuacion á los espacios ds, ds' por las velocidades virtuales respectivas que designaremos por δs, $\delta s'$... lo que en realidad equivale á multiplicar todos sus términos por una constante arbitraria, ó aun si se quiere por una funcion arbitraria, se convierte en la mas general

$$P \cos. \alpha\, \delta s + P' \cos. \alpha'\, \delta s' + \&c. = 0$$

ó

$$\Sigma P \cos. \alpha\, \delta s = 0.$$

y dice que *la condicion de equilibrio entre un sistema de fuerzas es que sea nula la suma de sus momentos virtuales.* Este teorema, debido al célebre Lagrange, lleva el nombre de principio de las *velocidades virtuales*.

30. Cuando los puntos de aplicacion solo pueden moverse al rededor de uno ó varios ejes fijos, como sucede en el ejemplo del núm. 21, las velocidades virtuales son necesariamente arcos semejantes, y por lo mismo proporcionales á las distancias de estos ejes á dichos puntos: llamando $r, r', r''\ldots$ á los radios $Oa, Oa', Oa'', \ldots$ se tiene siempre $\frac{r}{r'}=\frac{\delta s}{\delta s'}$, $\frac{r}{r''}=\frac{\delta s}{\delta s''}$, &c. y la anterior ecuacion se convierte en

$$Pr \cos. \alpha + P'r' \cos. \alpha' + \&c. = 0:$$

y si se observa que tirando desde O las $Op, Op'\ldots$ perpendiculares á las direcciones de las fuerzas, estas perpendiculares que designaremos por $p, p'\ldots$ tienen por valores respectivos r cos. α, r' cos. $\alpha'\ldots$ todavía se reduce á

$$Pp + P'p' + \&c. = 0.$$

A estos *productos de las fuerzas* P *por las distancias* p *de sus direcciones á los ejes* en cuyo rededor tienden á hacer girar, es á quienes se da mas particularmente el nombre de *momentos de las fuerzas.* Se cuidará de dar á cada término de la anterior ecuacion el signo que le corresponde, afectando del signo + á las fuerzas que obren en el mismo sentido, y del signo — á las que obren en sentido contrario. Cuando las fuerzas no se hallen en planos perpendiculares á los ejes, se tomará en vez de cada fuerza P su proyeccion sobre el plano perpendicular tirado por su punto de aplicacion, y en vez de p la distancia del eje á esta proyeccion.

31. Ya que las velocidades virtuales δs, $\delta s'$, conservan la misma relacion que los incrementos $ds, ds', \ldots$ será permitido tambien sustituir las primeras á los segundos en la

ecuacion del núm. 22, lo que igualmente equivaldria á multiplicarla por una constante arbitraria. Entonces se convierte en

$$\Sigma\, m \frac{d^2s}{dt^2} \delta s = \Sigma\, P \cos. \alpha\, \delta s,$$

ó

$$= \Sigma\, mg \cos. \alpha\, \delta s;$$

y así escrita presenta con la mayor generalidad las condiciones del movimiento de un sistema de cuerpos. Llamando fuerzas *impresas* á las P ó mg, y fuerzas *producidas* á las $m\frac{d^2s}{dt^2}$, esta ecuacion ó la del núm. 22, conforme al principio del núm. 29, indica la *existencia del equilibrio entre las fuerzas que se imprimen y las que son producidas*, y bajo este enunciado es conocida con el nombre de *principio de Dalembert*, su descubridor, ó el de *principio general de mecánica.*

32. Cuando son muchas las fuerzas y diversas sus direcciones es mas cómodo referir el sistema á tres ejes rectangulares fijos: llamando para uno de los cuerpos cuya masa es m.

x, y, z sus coordenadas al fin del tiempo t;

x', y', z' las correspondientes á otra época posterior t';

X, Y, Z á las proyecciones de g sobre los respectivos ejes, ó bien á los incrementos de velocidad que en el sentido de cada eje adquiriria el cuerpo por cada unidad de tiempo si cediese libremente á la fuerza que sobre él actúa;

$X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$ á las proyecciones de g cos. α sobre dichos ejes;

M, N, Q á las componentes de P en el sentido de los ejes, ó á las presiones equivalentes á mX, mY, mZ;

$\delta x, \delta y, \delta z$ á las proyecciones de la velocidad virtual δs de dicho cuerpo sobre los mismos ejes; las cuales en el caso de verificarse el movimiento, pueden reemplazarse por los incrementos diferenciales
dx, dy, dz de los espacios corridos segun la direccion de los ejes en el tiempo t, ó por las proyecciones sobre dichos ejes del espacio ds corrido en el instante siguiente dt;
v la velocidad del cuerpo al fin del tiempo t;
v' la velocidad del mismo al fin del tiempo t';
Σ una suma de términos semejantes, uno por cada cuerpo del sistema;

el momento virtual de la fuerza comunicada al cuerpo m durante el tiempo dt en el sentido de cada eje, será

$$mX_{,}dt\delta x, mY_{,}dt\delta y, mZ_{,}dt\delta z;$$

y el de la producida en el mismo

$$m\frac{d^2x}{dt}\delta x, \quad m\frac{d^2y}{dt}\delta y, \quad m\frac{d^2z}{dt}\delta z.$$

Formando la suma de términos análogos para todos los cuerpos del sistema, las ecuaciones de equilibrio entre unas y otras fuerzas son

$$\Sigma mX_{,}dt\delta x = \Sigma m\frac{d^2x}{dt}\delta x,$$

$$\Sigma mY_{,}dt\delta y = \Sigma m\frac{d^2y}{dt}\delta y,$$

$$\Sigma mZ_{,}dt\delta z = \Sigma m\frac{d^2z}{dt}\delta z.$$

33. Antes de sumarlas se observará: que $\frac{\delta x}{\delta s}$, $\frac{\delta y}{\delta s}$, $\frac{\delta z}{\delta s}$ son los cosenos de los ángulos que los ejes respectivos forman con la direccion de la velocidad virtual δs; que por consiguiente la suma de las proyecciones de las cantidades X, Y, Z sobre la tangente á la curva que en el instante considerado describe ó tiende á describir el móvil m, ó lo que es lo mismo, sobre la direccion de la velocidad virtual, es igual á $g\cos.\alpha$, ó que

$$g\cos.\alpha = \frac{X\delta x + Y\delta y + Z\delta z}{\delta s};$$

que por otra parte, segun la descomposicion hecha de $g\cos.\alpha$, se tiene

$$g\cos.\alpha\frac{\delta x}{\delta s} = X_{,}, \quad g\cos.\alpha\frac{\delta y}{\delta s} = Y_{,}, \quad g\cos.\alpha\frac{\delta z}{\delta s} = Z_{,};$$

y de estas, despues de multiplicadas por $\delta x, \delta y, \delta z$, de sumarlas y de sustituir δs^2 en vez de $\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2$, resulta

$$g\cos.\alpha = \frac{X_{,}\delta x + Y_{,}\delta y + Z_{,}\delta z}{\delta s};$$

y que por tanto

$$X_{,}\delta x + Y_{,}\delta y + Z_{,}\delta z = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Sumando ya las tres ecuaciones de equilibrio se halla

$$\Sigma m\frac{\delta x d^2x + \delta y d^2y + \delta z d^2z}{dt^2} = \Sigma m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

ó

$$= \Sigma(M\delta x + N\delta y + Q\delta z);$$

y cualquiera de estas es la escritura del principio de Dalembert.

34. Si conforme á lo establecido en el número anterior reemplazamos á $\delta x, \delta y, \delta z$ por las diferenciales dx, dy, dz, esto es, por las proyecciones del espacio que efectivamente corre cada móvil m en el instante dt, estas ecuaciones despues de integradas entre los límites x, y, z y x', y', z' á

quienes corresponden las velocidades v, v', no olvidando que $\frac{ds^2}{dt^2}=v^2$, &c., se convierten en

$$\Sigma m v'^2 - \Sigma m v^2$$
$$= 2\Sigma m \left(\int_x^{x'} X dx + \int_y^{y'} Y dy + \int_z^{z'} Z dz\right);$$

ó

$$= 2\Sigma \left(\int_x^{x'} M dx + \int_y^{y'} N dy + \int_z^{z'} Q dz\right);$$

que es la escritura general del principio de las fuerzas vivas.

35. En la aplicacion de este teorema al movimiento de los fluidos ocurre una simplificacion observada por Coriolis que vamos á hacer conocer.

Cuando el movimiento de un sistema de cuerpos es tal que al pasar estos por puntos dados del espacio gozan siempre de la misma velocidad, y esta velocidad es en una misma direccion, se dice que es *permanente* el movimiento.

Teniendo este carácter el movimiento de una masa fluida tal como la $AabB$, fig. 3, al valuar la variacion de fuerzas vivas ocurrida entre dos instantes dados, en cuyo intervalo habrá corrido esta masa un cierto espacio trasladándose á $A'a'b'B'$, se deberá restar la suma de las fuerzas vivas que tenia en el primer instante de la suma de las fuerzas vivas que tiene en el segundo. Pero á causa de la permanencia del movimiento es evidente que todo el volúmen $A'b$ comun á los dos espacios ocupados por la masa fluida en el primero y último instante tendrá en ambos una misma fuerza viva que se destruirá en la sustraccion, puesto que sus moléculas componen la misma masa y estan animadas de la misma velocidad. Bastará, pues, *tomar las partículas* Bb', *que han salido del espacio ocupado primitivamente, formar la suma de sus fuerzas vivas, tomar del mismo modo las partículas* Aa' *que ocupaban la porcion del mismo espacio abandonado por la otra parte, formar también la suma de sus fuerzas vivas, y restarla de la suma anterior.* La resta expresará la variacion buscada, ó el primer miembro de la anterior ecuacion.

36. Siendo la gravedad la única causa del movimiento de una masa líquida, la cantidad de accion que se produce en ella entre dos épocas dadas se puede valuar análogamente.

Sean en general

p', p'', p''', &c. los pesos de las varias moléculas del sistema;

dz', dz'', dz''', &c. las alturas que bajan en el instante dt.

z_0', z'; z_0'', z''; &c. las distancias verticales de estos cuerpos en el primero y último instante á un plano fijo horizontal superior HH;

La cantidad de accion del sistema

$$\int p'dz' + \int p''dz'' + \text{\&c.}$$

hecha la integracion entre los límites correspondientes al primero y último instante, y atendiendo á que son constantes los pesos p', p''... viene á ser

$$p'(z'-z'_0) + p''(z''-z''_0) + \text{\&c.}$$

ó
$$p'z' + p''z'' + \text{\&c.} - (p'z'_0 + p''z''_0 + \text{\&c.});$$

pero si se designa por P el peso total $p'+p''+$&c. de la masa fluida AB ó $A'B'$, y por k_0, k las ordenadas de su centro de gravedad en el primero y último instante, en

virtud de la propiedad conocida del centro de gravedad se tiene

$$Pk = p'z' + p''z'' + \&c.$$
$$Pk_0 = p'z'_0 + p''z''_0 + \&c.;$$

y la cantidad de accion del sistema se convierte en

$$P(k-k_0)$$

ó bien *en el producto del peso total por el descenso vertical que ha tenido el centro de gravedad entre las dos épocas.*

En el caso de una masa fluida si una porcion P' del peso P ocupa un espacio $A'B$ comun á la primera y última posicion de los pesos que se consideran, llamando k' la ordenada del centro de gravedad de este peso P', y z, z_0 las del peso restante $P-P'$ adelantado por una parte y desocupado por la otra; la última expresion se trasforma, por la misma propiedad del centro de gravedad en

$$P'k' + (P-P')z - (P'k' + (P-P')z_0)$$

que se reduce á

$$(P-P')(z-z_0):$$

asi *la cantidad de accion producida en la masa fluida viene á ser la misma que tendría lugar si solo el peso $P-P'$ del volúmen desocupado por una parte ó adelantado en la otra descendiese toda la altura* mn *comprendida entre los centros de gravedad de este volúmen en las dos posiciones.*

37. El camino seguido para llegar al principio de las fuerzas vivas hace ver que solo se verifica bajo la condicion de que los cuerpos, sometidos á fuerzas continuas cualesquiera, describen curvas continuas tambien, y que su velocidad varía por grados insensibles en cada elemento del tiempo. Pero supóngase que por consecuencia de un choque ó de otra causa cualquiera se ejercen sobre los cuerpos acciones instantáneas debidas á la resistencia á mudar de fi-

gura que ofrecen aquellos que experimentan este choque. La velocidad entonces se altera repentinamente en una cantidad finita tanto en magnitud como en direccion, y *la suma de las fuerzas vivas despues del choque viene á ser igual á la suma de las fuerzas vivas antes de él, menos la suma de las fuerzas vivas debidas á las velocidades que en virtud del mismo choque se han perdido.*

Llamando para uno de los cuerpos cuya masa es m

v su velocidad antes del choque,

v' su velocidad despues del choque,

v'' la velocidad perdida por causa del choque,

la escritura analítica de la anterior proposicion, conocida con el nombre de *teorema de Carnot*, que le descubrió, es

$$\Sigma\, m v'^2 = \Sigma\, m v^2 - \Sigma\, m v''^2.$$

Para dar razon de este hecho, sea uno de los cuerpos cuya masa es m animado de la velocidad v representada en magnitud y direccion por la línea AB, fig. 4, en el instante en que por una causa cualquiera se altera en magnitud y direccion y se convierte en el instante siguiente por ambos conceptos en v' ó en AB'. Formando el paralelógramo $AB'BB''$ sobre la diagonal AB, se debe concebir que la velocidad primitiva AB ha sido descompuesta en otras dos, una de las cuales AB' se conserva despues del choque y la AB'' ó v'' es destruida. Pero del triángulo ABB' se saca

$$v^2 = v'^2 + v''^2 + 2v'v''\cos. AB'B,$$

ó por ser el ángulo $B'AB''$ suplemento de $AB'B$,

$$v^2 = v'^2 + v''^2 - 2v'v''\cos. B'AB'';$$

multiplicando esta ecuacion por m y escribiendo otras semejantes para los demas cuerpos, resulta, despues de sumarlas,

$$\Sigma\, mv^2 = \Sigma\, mv'^2 + \Sigma\, mv''^2 - 2\Sigma\, mv'v''\cos. B'AB''.$$

Ademas de esto ya que las cantidades de movimiento mv''

producidas por las fuerzas instantáneas se destruyen en el choque ó se equilibran unas con otras, deben ser tales que sus productos por el espacio que describe cada cuerpo en el instante dt estimado en el sentido de su direccion, espacio representado por v' cos. $B'AB''dt$, se reduzca segun el núm. 28 á cero, ó bien que

$$\Sigma m\, v'v'' \cos. B'AB''dt = 0,$$

y entonces se obtiene la ecuacion de arriba.

No se cuenta para este equilibrio con las fuerzas contínuas ó variatrices que obran sobre el sistema, porque su efecto en el tiempo dt es infinitamente pequeño respecto de las fuerzas instantáneas á quienes da nacimiento el choque.

38. No sucede lo mismo cuando son contínuas las curvas descritas por los móviles ó cuando se altera el movimiento por grados insensibles. Norabuena que por el recíproco enlace de los cuerpos ó por la reaccion de las líneas ó superficies que se vean obligados á correr, pierdan en cada instante una porcion de su velocidad; esta porcion es infinitamente pequeña, y la fuerza viva que se pierde en cada instante, proporcional siempre al cuadrado de la velocidad, es infinitamente pequeña de segundo órden, y al cabo de un tiempo finito todavía es infinitamente pequeña de primer órden, es decir, nula.

39. Del principio de Dalembert ó del de las fuerzas vivas se deducen otros que nos contentaremos con enunciar.

Uno de ellos es el principio de la *conservacion del movimiento del centro de gravedad.*

Consiste en que cualquiera que sea la naturaleza del enlace de los cuerpos y de sus acciones mútuas, el centro de gravedad se mueve como si todas las fuerzas que actúan sobre los diferentes cuerpos se aplicasen inmediatamente á este centro segun sus direcciones respectivas.

40 Todo cuanto se ha dicho de un sistema de cuerpos se entiende igualmente de las moléculas de un mismo cuerpo solicitadas cada una por diferentes fuerzas; pero segun el anterior principio el movimiento de traslacion del cuerpo suponiéndole concentrado en el centro de su masa es el mismo que si se aplicasen á este todas las fuerzas.

En el caso de que se trata y suponiendo al cuerpo susceptible de ceder libremente, los ángulos α que forma con las fuerzas el elemento ds de la curva descrita por el móvil no estan determinados de antemano como en las cuestiones hasta aqui resueltas, sino que se deducen de la misma circunstancia de ceder dócilmente á su accion y de no poder seguir sino un solo camino ó una sola direccion en cada instante: estas circunstancias equivalen á la condicion de que no desaparezcan mas fuerzas que las que se destruyan recíprocamente. Siendo uno el cuerpo, la masa m es un factor comun en las tres ecuaciones del núm. 32, y lo mismo sucede en cada una de ellas á las cantidades δx, δy, δz. Las propiedades conocidas de las proyecciones sobre ejes rectangulares manifiestan que las sumas de las proyecciones designadas en aquel número por $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$ vienen á equivaler á las sumas de las X, Y, Z. La característica Σ puede suprimirse en el segundo miembro por ser uno solo el punto de aplicacion y una sola de consiguiente la fuerza producida. Con estas simplificaciones se reducen dichas ecuaciones á

$$\Sigma X = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\Sigma Y = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$\Sigma Z = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

:

análogas á la segunda del núm. 10, las cuales representan las circunstancias del movimiento de un cuerpo sometido á fuerzas cualesquiera con tal que ceda libremente á su accion.

Uno de los casos mas sencillos es el problema de las trayectorias de que se verá un ejemplo en el núm. 132.

Otro aun mas sencillo es el de la caida de los cuerpos pesados en el vacío. Tomando el eje de las z segun la direccion de su movimiento, suponiendo el cuerpo en reposo al principio del tiempo t y en el orígen de la altura z, de la tercera ecuacion ó del principio de las fuerzas vivas se saca

$$v^2=2gz;\quad v=\sqrt{2gz};$$

de donde

$$z=\frac{v^2}{2g},$$

z lleva el nombre de *altura debida á la velocidad* v, y recíprocamente v el de *velocidad debida á la altura* z.

Siendo en Madrid

$g=422$ pulgadas y log. $g=2{,}6253117$,

se tiene

$$\frac{1}{2g}=0{,}00118;\quad \log.\ \frac{1}{2g}=7{,}0736583:$$

$$\sqrt{2g}=29{,}052;\ \log.\ \sqrt{2g}=1{,}4631708:$$

y en pies españoles

$$g=35{,}1665;\quad \log.\ g=1{,}5461292:$$

$$\frac{1}{2g}=0{,}01422;\quad \log.\ \frac{1}{2g}=8{,}1528408:$$

$$\sqrt{2g}=8{,}3865;\quad \log.\ \sqrt{2g}=0{,}9235796.$$

Tambien pondremos el valor de la semicircunferencia cuyo radio es 1 por el frecuente uso que de él se hará, y es

$$\pi=3{,}1416;\quad \log.\ \pi=0{,}4971499.$$

41. Otro de los principios que se deducen de dichas ecuaciones es el llamado *principio de las áreas*. Consiste en

que en el movimiento de un sistema de cuerpos, cualquiera que sea el modo con que esten enlazados, sujetos á una fuerza de atraccion dirigida hácia un punto fijo ó no, la suma de los productos de las masas de los cuerpos por las proyecciones sobre cualquier plano de las áreas descritas al rededor de este punto, es una cantidad proporcional al tiempo é independiente de la naturaleza del sistema y de los movimientos particulares de cada cuerpo.

42. Finalmente, cuando las condiciones del enlace de los cuerpos es independiente del tiempo, y el sistema se halla en situaciones determinadas en dos épocas conocidas, la suma de las integrales de la forma

$$\Sigma m\int v\,ds,\quad \text{ó}\quad \Sigma m\int v^2dt\quad \text{ó}\quad \int dt\,\Sigma m v^2$$

tomadas entre los límites correspondientes á estas dos épocas, es siempre un máximo ó un mínimo.

Se emplea la primera integral cuando la velocidad v de cada cuerpo es funcion del espacio corrido s y una de las últimas cuando es funcion del tiempo t.

En esta propiedad consiste el *principio* llamado *de la menor accion* que tambien procede del de las fuerzas vivas.

SECCION PRIMERA.

DEL MOVIMIENTO DEL AGUA Á SU SALIDA DE UN DEPÓSITO POR BOCAS ABIERTAS EN SUS PAREDES.

43. Lo que en esta seccion nos proponemos averiguar es la relacion que existe entre el volúmen de agua que en un tiempo dado sale del depósito, la area de la boca ú orificio por donde se evacua, la velocidad del fluido á su salida y las dimensiones del depósito, en las circunstancias que con mas frecuencia ocurren en las aplicaciones.

Ante todas cosas haremos notar que cuando una masa fluida atraviesa un orificio ó por un parage cualquiera del espacio, no todas sus moléculas llevan siempre la misma velocidad unas que otras. Si sumásemos todas las velocidades de estas moléculas y dividiésemos la suma por su número, ó lo que para el caso viene á ser lo mismo, si el volúmen de agua que pasa en un segundo por una seccion hecha perpendicularmente á su direccion, se divide por la area de esta seccion, se obtendrá la propiamente llamada *velocidad media* del fluido en aquel parage.

Designando por

ω la area de la seccion perpendicular á la corriente;
v la velocidad media del fluido;
Q el volúmen de agua que en un segundo pasa por dicha seccion, volúmen que por abreviacion se llama el *gasto* de agua,

se tiene siempre

$$v=\frac{Q}{\omega}, \quad ó \quad Q=\omega v.$$

Consideraremos tres casos principales: 1.°, cuando el nivel del depósito se mantiene á una altura constante, ya por ser de una extension indefinida, ó ya por entrar en él tanta agua como sale por la boca: 2.°, cuando desciende este nivel sea por no entrar agua, ó sea por no entrar tanta como sale: 3.°, cuando el agua no sale al aire libre, sino que se vierte en otro depósito que se alimenta á expensas del primero.

CAPITULO PRIMERO.

DE LA SALIDA DEL AGUA DE UN DEPÓSITO CONSTANTEMENTE LLENO POR BOCAS ABIERTAS EN SUS PAREDES.

44. Sea un depósito, fig. 5, en que está abierto un orificio AB por donde sale el agua sin dejar de permanecer á un mismo nivel la superficie superior CE. Se supone: 1°, bastante delgada la pared (que no llegue su grueso á ser la mitad de la dimension mas pequeña del orificio) para que no tenga que considerarse el caso equivalente de que le esté aplicado un tubo adicional, caso que examinaremos mas adelante; y 2°, que la dimension vertical de este orificio sea bastante pequeña respecto de la altura del agua sobre su centro de figura (que no exceda de $\frac{1}{8}$ de esta altura) para que pueda tomarse la velocidad del filete central como velocidad media de la masa fluida que sale por el orificio. Por la observacion consta que los filetes de esta masa convergen al atravesar este orificio, y por efecto de esta convergencia la vena fluida se contrae hasta una pequeña distancia de él y se reduce á ab desde donde dichos filetes continuan moviéndose en direcciones sensiblemente

paralelas á la del filete central ó perpendiculares al plano del orificio. Llamando

ω la área del orificio AB;

m la relacion de la área de la seccion ab de la vena contraida con la área AB, relacion que se determinará por la experiencia;

Ω la área de la seccion superior CE del depósito;

h la altura constante del nivel superior CE del fluido sobre el centro de figura d del orificio; altura que suele designarse con el nombre de *carga*;

v la velocidad del fluido al fin del tiempo t á su paso por la vena contraida ab que es donde todos los filetes empiezan á ser paralelos;

Q el volúmen de fluido que sale del vaso en un segundo, ó lo que se llama el *gasto* de agua;

g el incremento de velocidad que por unidad de tiempo imprime la gravedad á los cuerpos $=422$ pulgadas;

Π el peso, expresado en quintales, de la unidad cúbica del fluido;

aplicaremos el principio de la conservacion de las fuerzas vivas para hallar la velocidad v, el gasto Q y las demas circunstancias del movimiento del fluido.

Prescindiremos de la presion atmosférica que se ejerce en la superficie superior CE y de la opuesta que por la misma causa actúa en la boca AB, porque siendo muy pequeña la diferencia h de las alturas atmosféricas sobre ambas superficies en comparacion con aquellas, dichas dos presiones se equilibran entre sí por el intermedio del fluido en virtud del principio de igualdad de presion, y no tienen de consiguiente influencia en el movimiento. Prescindiremos

tambien de la resistencia que proviene de la adherencia del fluido á las paredes del depósito. Entonces el movimiento del agua es solamente atribuido al peso de la masa líquida comprendida entre la seccion *ab* y el nivel superior.

Tomando las dos épocas t y $t+dt$, la variacion de fuerzas vivas que en el intervalo dt experimenta toda la masa fluida viene á ser segun el núm. 35 la diferencia entre la suma de las fuerzas vivas que han adquirido las moléculas que se han adelantado durante este tiempo desde la seccion *ab* hácia la parte exterior y la suma de las fuerzas vivas que adquieren las moléculas que en el mismo tiempo han desocupado el espacio contado desde la superficie superior *CE* hácia abajo.

Siendo v la velocidad del fluido en *ab*, el espacio corrido en el intervalo dt es vdt, el volúmen adelantado $m\omega vdt$ ó Qdt, su peso ΠQdt, su masa $\frac{\Pi}{g}Qdt$, y su fuerza viva $\frac{\Pi}{g}Qv^2dt$.

Debiendo entrar en el depósito tanta agua como sale para que el nivel superior se mantenga á la misma altura, el volúmen que se desocupa en la parte superior *CE* será tambien Qdt, y la velocidad de esta tonga será $\frac{Q}{\Omega}$ ó $\frac{m\omega}{\Omega}v$. Asi la fuerza viva adquirida por las moléculas fluidas situadas en el espacio desocupado durante el tiempo dt, es

$$\frac{\Pi}{g}Qdt.\frac{m^2\omega^2}{\Omega^2}v^2.$$

La variacion de fuerzas vivas en el tiempo dt es por consiguiente

$$\frac{\Pi}{g}Qv^2dt-\frac{\Pi}{g}Q\frac{m^2\omega^2}{\Omega^2}v^2dt,\text{ ó }\frac{\Pi}{g}Qv^2dt\left(1-\frac{m^2\omega^2}{\Omega^2}\right).$$

Para valuar ahora la cantidad de accion que se ejerce por la gravedad en la masa fluida suprimirémos como en el núm. 36 el peso comun á las dos posiciones de esta masa en las dos épocas, y atenderémos solamente al peso del volúmen que se ha adelantado en el intervalo dt. Este peso es $\Pi m\omega vdt$ ó ΠQdt. Cualquiera que sea la magnitud de la seccion horizontal superior *CE* la altura del volúmen desocupado en el instante dt es infinitamente pequeña, y puede tomarse h por la distancia vertical de los centros de gravedad de los dos volúmenes. La cantidad de accion producida será pues $\Pi Qhdt$, y la ecuacion de las fuerzas vivas se reduce en este caso á

$$\frac{\Pi}{g}Qv^2dt\left(1-\frac{m^2\omega^2}{\Omega^2}\right)=2\Pi Qhdt,$$

ó

$$v^2\left(1-\frac{m^2\omega^2}{\Omega^2}\right)=2gh;$$

lo que da para la velocidad del fluido en la seccion contraida *ab*

$$v=\sqrt{\frac{2gh}{1-\frac{m^2\omega^2}{\Omega^2}}};$$

y para el volúmen que sale en cada segundo,

$$Q=m\omega\sqrt{\frac{2gh}{1-\frac{m^2\omega^2}{\Omega^2}}}.$$

En la mayor parte de los casos que ocurren en las aplicaciones la área del orificio es muy pequeña respecto de las secciones del depósito ó canal. Asi siempre que su relacion $\frac{\omega}{\Omega}$ no exceda de $\frac{1}{20}$, podrá despreciarse el cuadrado

$\frac{m^2\omega^2}{\Omega^2}$: entonces la velocidad del fluido y el gasto del orificio se reducen á

$$v = \sqrt{2gh},$$

$$Q = m\omega\ \sqrt{2gh}:$$

la velocidad viene á ser (núm. 40) la debida á la altura del nivel superior sobre el centro del orificio.

45. Como las cantidades de agua que pasan en el mismo tiempo por el orificio AB y por la seccion contraida son iguales, la velocidad media del fluido en el orificio AB será $v = m\sqrt{2gh}$. De todos modos el gasto de agua por segundo es el producto de una de las dos secciones por la velocidad respectiva, y á causa de su proximidad se toma la velocidad $v = \sqrt{2gh}$ por la que tiene el agua *á su salida del depósito.*

46. Se han hecho muchas experiencias para determinar la relacion m de la área de la vena contraida á la área del orificio que por esto es llamado *coeficiente de la contraccion* (*). Ateniéndonos á las últimamente hechas por los ingenieros franceses Poncelet y Lebros (**), presentamos la siguiente tabla que da los coeficientes de reduccion m para diversas dimensiones de orificios y profundidades de agua. Los orificios de experiencia eran rectangulares y todos tenian 8^p,6 ó 20 centímetros de base. Se han reducido los coeficientes á alturas y cargas expresadas en números justos

(*) En todas se ha deducido este valor comparando el gasto efectivo Q con la expresion $\omega\sqrt{2gh}$ llamada *gasto teórico*, y por esto se ha dado tambien á m el nombre mas propio de coeficiente de *reduccion*, ó bien el de *coeficiente del gasto teórico.*

(**) Experiences hydrauliques sur les lois de l'écoulement de l'eau, entreprises á Metz d'aprés les ordres du ministre de la guerre. Paris, 1832. Fueron hechas en los años 1826 y 1827.

de pulgadas por medio de la construccion de varias curvas (*). Se extiende esta tabla á los casos en que la relacion de la dimension vertical del orificio á la carga de agua excede del límite expresado en el núm. 44 con la mira de que en todas ocasiones se pueda calcular el gasto por la fórmula última, compensándose con el coeficiente el error que se comete por no hacer uso de la mas complicada, si bien mas exacta, que se calculará en los números 55 y siguientes.

(*) Este procedimiento gráfico de interpolacion muy socorrido para traducir de unas medidas á otras las tablas numéricas y para presentar en números redondos los resultados de cualesquiera séries de experimentos, se reduce á lo siguiente.

Sobre una recta mirada como eje de las abscisas tomé, partiendo de un punto orígen, los números franceses de la primera coluna despues de convertidos en medidas españolas, y en cada punto correspondiente levanté ordenadas del tamaño de los coeficientes relativos á cada altura de orificio. Tracé á pulso curvas que observando la posible continuidad pasasen por los extremos de estas ordenadas. Obtuve asi la representacion gráfica de la tabla francesa resultando tantas curvas como orificios hay. Sobre el mismo eje de las abscisas se tomaron despues múltiplos ó partes alicuotas de pulgada para sustituir á los números franceses de la primera coluna. Se tiró por los puntos de division una segunda série de ordenadas que prolongadas hasta cortar las curvas construidas expresaban por su tamaño los coeficientes relativos á cargas de números justos de pulgadas, pero correspondientes todavía á las dimensiones verticales de los orificios franceses. Por último, entre cada dos curvas contiguas se marcaron en las ordenadas primitivas puntos cuya distancia vertical á la mas próxima fuese para cada uno la cuarta proporcional; 1.° á la diferencia entre las dimensiones verticales de los dos orificios franceses; 2.° á la diferencia entre la dimension vertical del orificio español, y la del frances que mas se le acercaba en valor, y 3.° á la diferencia de las ordenadas francesas. Haciendo pasar una curva por los puntos asi señalados, su interseccion con las ordenadas de la segunda série dió el valor de estas, y por consiguiente los coeficientes buscados. La escala horizontal, y sobre todo la vertical, deben ser bastante grandes para que puedan apreciarse las unidades del órden inferior.

TABLA *de los coeficientes de reduccion para orificios rectangulares abiertos en paredes delgadas, midiéndose las alturas del agua en un punto del depósito en que el agua esté completamente tranquila.*

Alturas sobre el borde superior del orificio.	COEFICIENTES SIENDO LAS DIMENSIONES VERTICALES DE LOS ORIFICIOS DE				
Pulgadas.	8 *pulgadas.*	4 *pulgadas.*	2 *pulgadas.*	1 *pulgada.*	$0^p,5$
0,25					0,696
0,50		0,593	0,613	0,650	0,693
0,75		0,598	0,616	0,651	0,689
1	0,578	0,601	0,619	0,651	0,685
1,50	0,583	0,605	0,624	0,652	0,680
2	0,587	0,608	0,627	0,652	0,676
2,50	0,589	0,609	0,628	0,652	0,672
3	0,591	0,611	0,629	0,651	0,669
3,50	0,592	0,613	0,631	0,649	0,667
4	0,594	0,613	0,631	0,648	0,665
4,50	0,595	0,614	0,631	0,648	0,663
5	0,596	0,615	0,631	0,648	0,661
5,50	0,596	0,615	0,631	0,648	0,660
6	0,597	0,615	0,631	0,645	0,659
7	0,598	0,616	0,631	0,645	0,656
8	0,600	0,617	0,630	0,645	0,656
9	0,601	0,617	0,630	0,643	0,654
10	0,601	0,617	0,630	0,643	0,652
12	0,602	0,618	0,630	0,641	0,649
18	0,604	0,618	0,629	0,638	0,645
24	0,605	0,618	0,628	0,636	0,641
30	0,606	0,618	0,628	0,634	0,639
36	0,607	0,618	0,628	0,633	0,636
42	0,607	0,618	0,627	0,631	0,633
48	0,606	0,616	0,626	0,630	0,630
54	0,604	0,615	0,623	0,626	0,624
60	0,603	0,613	0,622	0,622	0,619
66	0,603	0,612	0,619	0,619	0,614
72	0,603	0,611	0,616	0,616	0,613
78	0,602	0,610	0,614	0,614	0,612
84	0,602	0,608	0,612	0,612	0,611
120	0,601	0,605	0,609	0,610	0,610

47. Se puede observar en esta tabla que los valores del coeficiente de contraccion se hallan comprendidos entre 0,60 y 0,70 y aun en los casos ordinarios entre 0,60 y 0,64. Tomando un promedio entre estos dos límites, se tendrá la fórmula aproximada

$$Q = 0{,}62\,\omega\sqrt{2gh}\,;$$

cuando se necesite mas exactitud se acudirá á los coeficientes de la tabla, que son aplicables cualquiera que sea la figura del orificio, su magnitud y la inclinacion de la pared en que esté abierto, con tal que se hallen cumplidas las otras condiciones del núm. 44.

48. Si el orificio no es rectangular se tomará por su altura en la tabla la menor de sus dimensiones trasversales. Si la altura excede de 8 pulgadas, el coeficiente que deberá tomarse será el que corresponde á estas 8 pulgadas. Cuando no sea igual á ninguna de las dimensiones verticales de la tabla, se tomará el promedio proporcional entre los coeficientes correspondientes á las alturas entre quienes está comprendida. Por ejemplo, para un orificio de tres pulgadas de altura con una carga de agua de dos pulgadas sobre su borde superior se tomará el coeficiente 0,617 medio entre 0,608 y 0,627, asi como lo es 3 pulgadas entre 2 y 4 pulgadas.

El coeficiente 0,625 conviene próximamente al gasto de los postiguillos abiertos en las exclusas de los canales de navegacion, aunque este gasto sea 20 ó 30 veces mayor que los mayores de esta tabla.

En las experiencias que se hicieron para comprobarlo se observó que abriendo á un tiempo los postiguillos de las dos hojas de puerta, se disminuia en cerca de $\frac{1}{8}$ el gasto de cada uno respecto del que daba cuando uno de los dos se mantenia cerrado. Aunque esta observacion no ha sido confirmada

por otras experiencias posteriores hechas por Mr. D'Aubuisson, se continúa sin embargo en emplear el coeficiente 0,55 en este caso.

49. Se ha supuesto en lo que precede que la pared en que está abierto el orificio era plana. Si á esta pared se diese exactamente la figura *ABba* que toma la vena fluida, es evidente que tomando ω por la área del orificio *ab*, se tendria $m=1$. Cuando la pared es cóncava hácia el interior del vaso, la oblicuidad de los filetes fluidos al acercarse al orificio no es tan grande como en el caso de ser plana y el coeficiente m, mayor que 0,62, se acerca al límite $m=1$. Lo contrario sucede cuando la pared es convexa, y si se trasportase el orificio al interior del fluido, podria llegar á tenerse $m=0,50$.

50. Se han medido por varios ingenieros franceses las magnitudes de la vena contraida que sale por un orificio circular: tomando por unidad el diámetro *AB* del orificio, se ha hallado para el diámetro $ab=0,79$, y para la longitud $cd=0,39$. La figura del perfil longitudinal *Aa* es semejante al remate de una corneta. La relacion 0,79 de los diámetros *AB* y *ab* da 0,62 para la de las áreas, lo que concuerda con el valor medio hallado para m.

Mas allá de la seccion contraida los filetes fluidos continúan sensiblemente paralelos un cierto trecho, despues del cuál la masa fluida presenta una seccion estriada, con la particularidad de que las partes entrantes corresponden á los ángulos de los orificios, y las estrias ó salientes á los lados de los mismos.

En cuanto á la curva descrita por la masa fluida en su movimiento, mas adelante (núm. 220) se tendrá ocasion de determinarla.

51. Se ha supuesto tambien que la masa fluida se contraia igualmente en todos los sentidos al llegar al orificio, lo que sucede efectivamente cuando este está abierto á cierta distancia de las paredes adyacentes á la suya. Pero si no es así; por ejemplo, si abierto en una pared vertical, se halla su borde inferior en el plano del fondo del depósito, la contraccion por este lado no tiene ya lugar y el gasto debe por consecuencia ser de mas consideracion: mayor será aun si aplicando tablas en uno ó mas de los otros bordes perpendicularmente al plano, se suprime la contraccion por estos lados.

Las experiencias que se hicieron para averiguar en tales casos la modificacion que sufre el coeficiente de reduccion dan por resultado: que siendo m el coeficiente que segun la tabla del núm. 46 corresponde á la altura y carga del orificio cuando la contraccion es completa por los cuatro lados, si hay uno sin contraccion el coeficiente es $1,035m$,
si hay dos . . . . $1,072m$,
si tres . . . . $1,125m$,
si los cuatro . . . . $1,325m$.

Este último caso corresponde al de aplicarse al orificio un tubo adicional prismático, y de él trataremos mas adelante en el núm. 65.

52. Si ademas de hallarse suprimida la contraccion en el fondo y los lados del orificio por estar en la prolongacion de las caras del depósito, es inclinada al horizonte la pared en que está abierto, fig. 26, la contraccion se disminuirá tambien en el lado superior. Las experiencias dan en estas circunstancias los siguientes valores de m:

Si el talud ó la relacion de la base con la altura es $=\frac{1}{2}$,
el coeficiente $m=0,74$;
si el talud es $=1$, $m=0,80$.

53. Exteriormente á los orificios se ponen á veces unas

canales prismáticas descubiertas, cuyos lados estan aplicados á sus bordes. Mientras la carga del agua exceda del triple de la altura del orificio, y esta es una de las hipótesis de que hemos partido para establecer la fórmula del número 44, la presencia de la canal no tiene influencia en el gasto. Pero si la carga es menor y la canal tiene poca inclinacion, el gasto mengua tambien hasta el punto de reducirse á los $\frac{4}{5}$ y aun á los $\frac{3}{4}$ del calculado por dicha fórmula. Esta disminucion proviene en parte de que por ser de poca entidad la carga del agua, se hacen sentir en el interior del depósito los remansos que se forman en la canal. Los valores que en tales casos se deben atribuir al coeficiente de reduccion m, segun las experiencias de los expresados ingenieros, se indican en la tabla siguiente. Se distinguen en ella seis casos, fig. 7:

1.° La contraccion es completa por estar abierto el orificio á cierta distancia de las paredes laterales y del fondo del depósito.

2.° Suprimida la contraccion en el fondo.

3.° Suprimida en el fondo y modificada en uno de los lados por estar abierto el orificio cerca de una de las paredes laterales del depósito.

4.° Suprimida en el fondo y en uno de los lados.

5.° Suprimida en el fondo y en los dos lados.

6.° Suprimida en los mismos tres lados; pero la anchura de la canal es mayor que la del orificio, uniéndose las dos por medio de derrames ó caras en chaflan.

No se ponen números justos de pulgadas por faltar datos para verificar la interpolacion de una manera suficientemente aproximada.

Los coeficientes seguidos de un asterisco han sido interpolados por los mismos ingenieros.

Dimension vertical del orificio.	Altura del agua sobre el borde superior del orificio.	COEFICIENTES DE REDUCCION PARA LOS CASOS ANTERIORMENTE EXPRESADOS.					
Pulgadas.	*Pulgadas.*	1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°
8,61	0,02	0,483	0,482	0,484	0,485	0,484	0,483*
	0,14	0,559	0,552	0,550	0,548	0,576	0,573
	0,30	0,591	0,580	0,582	0,577	0,603	0,597
4,31	0,01	0,464	0,463*	0,462*	0,462*	0,460*	0,460*
	0,04	0,523	0,522*	0,522*	0,517*	0,510*	0,510*
	0,06	0,562	0,560*	0,561*	0,562*	0,566*	0,564*
	0,11	0,590	0,580*	0,583*	0,585*	0,606*	0,604*
2,15	0,65	0,452	0,443	0,442*	0,442	0,417*	»
	1,07	0,495	0,493	0,486	0,490	0,462	0,501
	3,65	0,614	0,597	0,598	0,601	0,610	0,609
	7,54	0,631	0,615	0,618*	0,622	0,636	0,628
1,29	1,94	0,627	0,605*	0,602*	0,607	0,572	0,594*
	7,98	0,632	0,631*	0,632*	0,635	0,650	0,651*

Caso en que la altura del agua en el depósito es pequeña respecto de la dimension vertical del orificio.

54. Hemos supuesto hasta aqui que la altura del agua sobre el orificio era bastante grande respecto de su dimension vertical para que pudiese tomarse por velocidad media la del filete central. El error que podria cometerse por adoptar este partido en los orificios verticales ó inclinados es en mucha parte rectificado por el valor del coeficiente m que corresponde á cada caso, segun la tabla del núm. 46.

Pero cuando la carga del agua es menor que la altura vertical del orificio, es mas exacto calcular directamente el gasto y la velocidad media ó la altura debida á esta velocidad. Consideremos para esto un orificio vertical $AMBN$, fig. 8, y llamemos

z la distancia vertical Cp de un punto cualquiera m al nivel HH del fluido,

y la distancia pm á un eje vertical cualquiera CA.

El elemento de la área del orificio que corresponde á este punto es $dydz$, y la velocidad del filete fluido que sale por él es, segun el núm. 44, $\sqrt{2gz}$: esta velocidad es la misma para cada capa horizontal, y va creciendo de arriba abajo en todo el orificio. El gasto de agua por este orificio elemental es pues $mdydz\sqrt{2gz}$ ó $m\sqrt{2g}.dydz\sqrt{z}$ y el gasto por el orificio $AMBN$ tendrá por expresion

$$Q=m\sqrt{2g}\iint dydz\sqrt{z}$$

Siendo la área de la seccion contraida $m\iint dydz$, el valor

de la velocidad media á su paso por ella será

$$\sqrt{2g}.\frac{\iint dydz\sqrt{z}}{\iint dydz};$$

y la altura debida á esta velocidad,

$$\left(\frac{\iint dydz\sqrt{z}}{\iint dydz}\right)^2;$$

estas expresiones deberán integrarse con relacion á z entre los límites superior é inferior del orificio y con relacion á y entre los límites laterales del mismo.

55. Si fuese inclinado el plano del orificio, se proyectaria este sobre un plano vertical, y se aplicaria á la proyeccion lo que acaba de prevenirse para calcular la velocidad media. El producto de esta velocidad por la área del orificio daria despues el gasto Q.

56. Sea por primer ejemplo un orificio rectangular, figura 9, y llamemos

a su anchura horizontal AD,

h' la altura AC del agua sobre su borde inferior;

h'' la altura BC del agua sobre el borde superior.

El volúmen de agua por segundo será

$$Q=ma\sqrt{2g}\int_0^a dy\int_{h''}^{h'} dz\sqrt{z},$$

ó

$$Q=\tfrac{2}{3}m\sqrt{2g}\,(h'\sqrt{h'}-h''\sqrt{h''}).$$

Si se quiere la velocidad media, se dividirá esta expresion por la área de la seccion de la vena contraida $ma\,(h'-h'')$ y será

$$v=\tfrac{2}{3}\sqrt{2g}\left(\frac{h'\sqrt{h'}-h''\sqrt{h''}}{h'-h''}\right).$$

La altura debida á esta velocidad media es

$$h = \frac{4}{9}\left(\frac{h'\sqrt{h'} - h''\sqrt{h''}}{h' - h''}\right)^2.$$

Los valores del coeficiente m determinados por los ingenieros Poncelet y Lebros en experiencias comparadas con estas fórmulas son los que se señalan en la siguiente tabla que se ha reducido por medio de curvas á números justos de pulgadas españolas.

Tabla *de los coeficientes de reduccion para orificios rectangulares verticales abiertos en paredes delgadas cuando la altura del agua sobre el centro de los orificios no excede del triple de la dimension vertical de estos, midiéndose esta altura en un punto del depósito donde el agua esté perfectamente remansada.*

Altura sobre el borde superior del orificio.	COEFICIENTES siendo la dimension vertical de los orificios de				
Pulgadas.	8 *pulgadas.*	4 *pulgadas.*	2 *pulgadas.*	1 *pulgada.*	0p,5
0,25		0,612	0,625	0,661	0,705
0,50	0,592	0,613	0,627	0,658	0,698
0,75	0,594	0,613	0,628	0,657	0,692
1	0,596	0,614	0,628	0,656	0,683
1,50	0,598	0,614	0,629	0,654	
2	0,599	0,615	0,630	0,653	
3	0,600	0,616	0,631	0,651	
4	0,601	0,617	0,632		
5	0,601	0,617	0,632		
6	0,602	0,618			
8	0,602	0,618			
10	0,603	0,619			
12	0,604				
18	0,604				
36	0,606				

57. Sea en segundo lugar un orificio circular del radio $OA = r$, fig. 10: llamando h la altura CO del agua sobre el centro, la fórmula del núm. 54 se convertirá en

$$Q = m\sqrt{2g}.2\int_{h-r}^{h+r} dz\sqrt{z}\int_0^{\sqrt{r^2-(h-z)^2}} dy$$

ó en $Q = m\sqrt{2g}.2\int_{h-r}^{h+r} dz\sqrt{z}.\sqrt{\left(r^2-(h-z)^2\right)}$

Si expresamos la variable z en funcion del ángulo MOB que llamaremos x, haciendo para abreviar $\frac{r}{h} = n$, se tendrá para los puntos del semicírculo superior

$$h - z = r \cos. x, \quad dz = r \text{ sen. } x,$$

$$Q' = mr^2\sqrt{2gh}.2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{sen.}^2 x \sqrt{(1 - n\cos. x)};$$

y para los puntos del semicírculo inferior DAN

$$z - h = r\cos. x, \quad dz = -r \text{ sen. } x;$$

y $Q'' = mr^2\sqrt{2gh}.2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{sen.}^2 x \sqrt{(1 + n\cos. x)}$:

desarrollando los radicales y efectuando la integracion de los diferentes términos se obtendrá el gasto Q' ó Q'' de un orificio semicircular, ya insista sobre un diámetro horizontal, ya esté por debajo de él; pero para el orificio circular puede observarse desde luego que al sumar los gastos Q' y Q'' con el fin de tener el gasto total Q, los términos afectos de las potencias impares de $n\cos. x$ se destruyen, y los otros son iguales de dos en dos por deber integrarse entre los mismos límites; queda entonces

$$Q = mr^2\sqrt{2gh}.4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-\cos.^2 x)\left(1 - \frac{n^2}{8}\cos.^2 x - \frac{5n^4}{128}\cos.^4 x - \&c.\right),$$

que despues de convertidas las potencias de los cosenos en cosenos de los arcos múltiplos para efectuar la integracion, y hecha esta, se reduce á

$$Q=m\pi r^2\sqrt{2gh}\,(1-\frac{n^2}{32}-\frac{5n^4}{1024}-\&c.);$$

esta série es tan convergente que en la práctica bastarán casi siempre los dos primeros términos. Los valores del coeficiente m se tomarán en la tabla anterior como si el diámetro fuese la dimension vertical del orificio.

Siendo πr^2 la área del orificio, la velocidad media del fluido á su paso por la seccion contraida es

$$v=\sqrt{2gh}\,(1-\frac{n^2}{32}-\frac{5n^4}{1024}-\&c.),$$

un poco menor que la $\sqrt{2gh}$ del filete central; y la altura debida á esta velocidad

$$h(1-\frac{n^2}{32}-\frac{5n^4}{1024}-\&c.)^2=h\,(1-\frac{n^2}{16}-\frac{9n^4}{1024}-\&c.)$$

Apliquemos estas fórmulas á la siguiente cuestion: se ha abierto en una pared un orificio circular de $6\frac{1}{2}$ líneas de diámetro, y se desea saber á qué altura sobre su borde superior debe permanecer la superficie del agua para que salgan 3 pulgadas cúbicas por segundo.

Presumiendo que esta altura debe ser muy pequeña, haremos $m=0,71$ en el valor anterior de Q. Tenemos ademas $r=\frac{3,25}{12}$ pulgadas, $Q=3$, y dicha ecuacion se trasforma en

$$3=4,3706\,\sqrt{h}\left(1-\frac{0,00229}{h^2}-\&c.\right);$$

que elevada al cuadrado, y despreciando los términos comprendidos desde el segundo en adelante, es

$$9=4,3706^2\,h\left(1-\frac{0,00458}{h^2}\right)$$

ó

$$h^2-\frac{9h}{2.4,3706^2}=0,00458$$

y da

$$h=0,235+2,244=0^p,48.$$

La altura sobre el borde superior será, pues, de 5,75—3,25 =2,5 líneas ó un poquito menos.

58. En el caso que consideramos de ser la carga pequeña, debe tenerse presente que la superficie del fluido se deprime notablemente hácia la pared del orificio mientras se verifica la salida, formando su perfil longitudinal una curva tangente á la superficie del depósito en un punto algo distante de la pared. Las alturas h, h', h'' que entran en las fórmulas anteriores, deben medirse siempre desde mas arriba de estos puntos de tangencia para obtener resultados exactos. El error que se cometeria por contar estas alturas desde la línea en que la superficie fluida encuentra á la pared por encima del orificio, podria llegar á ser en algunos casos de $\frac{1}{10}$ del gasto.

Proponiéndose Mariotte valuar la pulgada de agua que sirve de unidad de medida á los fontaneros franceses, y que es el gasto por un orificio circular de una pulgada de diámetro, manteniéndose el nivel del agua á una línea sobre el borde superior del orificio, observó que era necesario para obtener este nivel que la superficie interior del depósito se mantuviese á 2 líneas sobre dicho borde, ó á 8 líneas sobre el centro del orificio.

59. Siendo muchas veces difícil, y algunas imposible, medir con exactitud la altura del nivel remansado sobre el borde de los orificios, y para evitar por otra parte el uso complicado de estas fórmulas en los casos que no requieran muy escrupulosa exactitud, se pone á continuacion una tabla de los valores del coeficiente de reduccion m de la fórmula calculada en el núm. 44, $Q = m\,\omega\,\sqrt{2gh}$, para cuando las alturas h se midan inmediatamente por encima del borde superior del orificio donde el nivel se halla deprimido. Cuando las alturas sean mayores que las de esta tabla, la depresion es insensible, y se hará uso de los coeficientes de la del núm. 46.

TABLA *de los coeficientes* m *de reduccion de la fórmula* $Q = m\omega\sqrt{2gh}$ *para orificios rectangulares verticales abiertos en paredes delgadas, saliendo el agua al aire libre, siendo completa la contraccion y midiéndose las alturas del agua por encima de los mismos orificios.*

Altura sobre el borde superior del orificio.	COEFICIENTES siendo las dimensiones verticales de los orificios de				
Pulgadas.	8 *pulgadas.*	4 *pulgadas.*	2 *pulgadas.*	1 *pulgada.*	0p,5
0	0,646	0,673	0,722	0,778	0,793
$\frac{1}{12}$	0,612	0,658	0,700	0,764	0,784
$\frac{1}{6}$	0,606	0,643	0,687	0,754	0,778
0,25	0,601	0,634	0,673	0,739	0,770
0,50	0,597	0,619	0,647	0,706	0,750
0,75	0,596	0,617	0,642	0,694	0,731
1	0,595	0,615	0,641	0,684	0,716
1,25	0,595	0,615	0,640	0,677	0,705
1,50	0,594	0,614	0,639	0,674	0,698
1,75	0,594	0,614	0,639	0,670	0,690
2	0,594	0,614	0,638	0,668	0,685
2,50	0,593	0,614	0,637	0,664	0,679
3	0,594	0,614	0,636	0,659	0,675
3,50	0,595	0,615	0,635	0,656	0,672
4	0,596	0,615	0,634	0,654	0,669
4,50	0,597	0,616	0,634	0,651	0,665
5	0,598	0,616	0,633	0,650	0,664
5,50	0,599	0,616	0,633	0,650	0,662
6	0,599	0,617	0,632	0,650	0,660
7	0,600	0,616	0,632	0,648	0,658
8	0,600	0,617	0,631	0,645	0,655
9	0,601	0,618	0,631	0,644	0,654
10	0,601	0,618	0,630	0,643	0,652
11	0,601	0,619	0,630	0,642	0,651
12	0,602	0,618	0,630	0,641	0,649

Queriendo, por ejemplo, que salgan en cada segundo 3^{ppp} de agua por un orificio circular de $6\frac{1}{2}$ líneas de diámetro, se quiere señalar en la misma pared sobre el borde superior una línea á cuyo nivel se mantenga constantemente el agua durante su salida.

En la fórmula $Q=m\omega\sqrt{2gh}$ se conoce $Q=3$, $\omega=\pi r^2=0,23044$; tomando $m=0,78$ se halla

$$h=\frac{Q^2}{m^2\omega^2.2g}=0^p,33=4 \text{ líneas};$$

la altura de la raya sobre el borde superior debe ser por consiguiente de $4-3\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ línea.

Si se compara este resultado con el del núm. 57, se ve que la depresion que experimenta el nivel del agua cerca de la pared del orificio es de $2\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=1\frac{3}{4}$ línea.

¿Cuál debe ser el rádio del orificio que bajo la misma carga de $\frac{3}{4}$ de línea sobre su borde produzca 60^{ppp} por segundo?

La fórmula se trasforma en

$$Q=m\pi r^2\sqrt{2g(r+\tfrac{1}{16})}$$

y da

$$r^5+\tfrac{1}{16}r^4=\frac{Q^2}{m^2\pi^2.2g}=\frac{0,43305}{m^2}$$

ó

$$r^5+0,0625\,r^4-\frac{0,43305}{m^2}=0.$$

Tomando $r=1$, lo que da para el orificio $m=0,70$,

resulta. . . . . $+0,1787=0$
$r=0,95$. . . . . $-0,059=0$
$r=0,96$. . . . . $-0,016=0$
$r=0,965$. . . . . $+0,007=0$
$r=0,964$. . . . . $+0,003=0$
$r=0,963$. . . . . $-0,002=0$;

el diámetro será de $1^p,927$ muy próximamente.

Orificios abiertos por encima: almenaras ó vertedores.

60. Consideremos el caso en que el orificio está abierto en una pared vertical hasta mas arriba del nivel del depósito, fig. 11. Supongámosle rectangular y que su base horizontal, llamada *umbral* ó *solera*, esté proyectada en *A*.

La experiencia manifiesta que la superficie fluida se deprime aun mas notablemente que en el caso anterior antes de llegar al orificio, segun la curva *Ca*, y que sin error sensible se puede suponer que el orificio se ha retirado á *CD*, y calcularse su gasto segun el procedimiento del número 56, tomando $h''=0$ y h' igual á la altura *CD* del depósito sobre el umbral. Asi, pues, el gasto en este caso está bien representado por la fórmula

$$Q=\tfrac{2}{3}mah'\sqrt{2gh'},$$

y la velocidad en la seccion contraida por

$$v=\tfrac{2}{3}\sqrt{2gh'};$$

en la primera se atribuirá á m el valor que le corresponde en la tabla siguiente:

Altura sobre el umbral ó h'.	$0^p,50$	$0^p,75$	1^p	$1^p,50$	2^p	3^p	4^p	6^p	8^p
Valor de m.	0,634	0,628	0,623	0,614	0,606	0,599	0,593	0,590	0,587

En la mayor parte de los casos se podrá tomar $m=0,61$, y entonces el valor de Q es

$$Q=0,406\,ah'\sqrt{2gh'}.$$

61. Si como sucede las mas veces las dimensiones de estos orificios llamados *almenaras* ó *vertedores* son comparables con las del canal que les conduce el agua, deberá tomarse en cuenta la velocidad en este canal, segun se hizo en el núm. 44. Siendo $\frac{2}{3}\sqrt{2gh'}$ la velocidad media en *CD*

cuando se halla sensiblemente en reposo el fluido del depósito, la velocidad media actual será segun dicho número

$$\tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{2gh'}{1-\frac{m^2\omega^2}{\Omega^2}}} \text{ ó bien } \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{2gh'}{1-\frac{m^2a^2h'^2}{\Omega^2}}};$$

asi el gasto del vertedor será

$$Q=\tfrac{2}{3}mah'\sqrt{\frac{2gh'}{1-\frac{m^2a^2h'^2}{\Omega^2}}},$$

ó próximamente en las aplicaciones

$$Q=0{,}406\,ah'\sqrt{\frac{2gh'}{1-\frac{0{,}37a^2h'^2}{\Omega^2}}};$$

Ω representa la área de la seccion trasversal del canal ó rio.

Cuando la anchura del vertedor es igual á la del canal, se podrá excusar esta fórmula y hacer uso de la del número anterior, tomando $m=0{,}63$, segun indican las experiencias. Es entonces

$$Q=0{,}42\,ah'\sqrt{2gh'}.$$

62. En muchas ocasiones es mas cómodo medir inmediatamente la altura aA del agua en la pared del depósito, y convendria por lo mismo saber qué funcion es de la altura h' y de las anchuras relativas del vertedor y del canal. Dubuat, Navier y Robisson creyeron que solo dependia de la altura h', haciéndola de $0{,}50h'$ el primero, de $0{,}725h'$ el segundo, y de $0{,}714h'$, ó $\frac{5}{7}h'$ el tercero. Adoptando el coeficiente 0,72 para los casos en que la anchura del vertedor sea mucho menor que la del canal, y designando por b la altura medida Aa, resulta $h'=1{,}53b$, cuyo valor sustituido en la fórmula del núm. 60 la convierte en

$$Q=0{,}768\,ab\sqrt{2gb}.$$

Si la anchura del vertedor es igual ó poco menor que la del depósito, se puede tomar

$$h'=1{,}25b \quad \text{cuando } a=a'$$

y

$$h'=1{,}178b \text{ cuando } a=\tfrac{4}{5}a'$$

y sustituir estos valores en la última fórmula del número anterior.

63. Siempre que la pared plana en que está abierto el vertedor se extiende algun tanto á derecha é izquierda de él, la línea de nivel del fluido contada en los extremos de esta pared, coincidirá muy próximamente con la superficie del depósito en su interior. Poniendo, pues, un hilo muy tirante desde un extremo á otro, la altura de este hilo sobre el medio del umbral dará inmediatamente el valor de h'. Este procedimiento puede aplicarse en igualdad de circunstancias al caso considerado en los números 54 y siguientes.

64. Si el vertedor es seguido inmediatamente de canales (como las del núm. 53) horizontales ó con una pendiente que no exceda de $\frac{1}{10}$, el gasto experimenta una disminucion análoga, y el coeficiente m que se ha de sustituir en la fórmula

$$Q=\tfrac{2}{3}mah'\sqrt{2gh'}$$

toma los valores que indica la siguiente tabla, calculada por los mismos ingenieros para cinco de los seis casos especificados en aquel número.

Altura del agua sobre el umbral.	COEFICIENTE DE REDUCCION SEGUN LAS DISPOSICIONES DEL				
Pulgadas.	*Caso* 1º	*Caso* 2º	*Caso* 4º	*Caso* 5º	*Caso* 6º
2	0,415	0,403	0,399	0,384	0,408
3	0,431	0,428	0,427	0,417	0,440
4	0,448	0,445	0,445	0,446	0,462
6	0,469	0,465	0,465	0,471	0,478
8	0,476	0,480	0,477	0,479	0,490

Influencia de los tubos adicionales.

TUBOS CILÍNDRICOS.

65. Si á un orificio abierto en pared delgada se aplica un tubo cilíndrico *ABGH*, fig. 12, de su mismo diámetro, la convergencia de los filetes fluidos al salir por *AB*, y la contraccion consiguiente de la vena fluida en *ab*, tiene lugar del mismo modo que si el tubo no existiese. Despues de pasar la vena por *ab*, las paredes del tubo atraen á los filetes de su superficie, los cuales se llevan consigo sucesivamente á los interiores, y no tarda la vena en ocupar todo el tubo saliendo á caño lleno por su boca *GH*: y ya sea por causa de esta atraccion molecular de las paredes del tubo, ó ya en virtud del exceso de presion atmosférica que experimenta la superficie *CD* del depósito por causa del vacío que sobreviene al interior del tubo en la seccion contraida, el hecho es que la velocidad en *ab*, y por consiguiente en *AB*, es mayor que en el caso de no existir el tubo. En los casos ordinarios de las aplicaciones en que $m=0,62$, se ha comprobado por repetidas experiencias que la velocidad del fluido á su paso por la vena contraida se hace 1,32 veces mayor; á su salida por la boca *GH* á caño lleno será de consiguiente $1,32m\sqrt{2gh}$

ó $$v=0,82\sqrt{2gh}$$

es decir, solamente las 0,82 de la velocidad debida á la carga h.

El gasto por el tubo resulta

$$Q=0,82\omega\sqrt{2gh}$$

ó 1,32 veces mayor que cuando no le hay.

Estas fórmulas suponen que la longitud del tubo está

comprendida entre dos y tres veces su diámetro. Si es menor, y principalmente si es menor que la longitud *cd* de la vena contraida, fig. 12, no tiene lugar ninguno de los fenómenos de que hemos hecho mencion, y la salida se verifica como en los orificios simples. Si es mayor, el rozamiento del fluido sobre las paredes del tubo irá disminuyendo mas y mas el gasto. Las experiencias de Michelotti, hechas con un tubo de $2\frac{1}{3}$ pulgadas de diámetro bajo una carga de 52 pulgadas, dan para el coeficiente de este gasto los valores siguientes:

Longitud del tubo. *Diámetros.*	Coeficiente del gasto.
0	 0,6096
$\frac{1}{2}$	 0,6169
1	 0,7671
2	 0,8157
$2\frac{1}{2}$	 0,8221
3	 0,8201
4	 0,8179
5	 0,8095
6	 0,8070
7	 0,8032
8	 0,7997

66. Se puede dar razon del exceso de presion atmosférica que tiene lugar en la superficie del depósito sobre la que ocurre en el interior del tubo, observando que, segun se verá mas adelante, núm. 206, la presion de un fluido en movimiento á lo largo de un tubo, es debida á una altura de fluido equivalente á la de la atmósfera que produzca igual

peso, mas á la altura del depósito, menos la altura debida á la velocidad que lleva el fluido en el tubo. Llamando, pues, a la primera altura, h la segunda, y v la velocidad en la seccion contraida, la presion en este parage será debida á la altura $a+h-\frac{v^2}{2g}$; ó poniendo por v su valor actual $1,32\sqrt{2gh}$, á la altura

$$a-0,75h:$$

la presion interior es por consiguiente menor que la presion atmosférica; y si se aplica al punto b un tubo recurvo bmn cuyo extremo esté sumergido en un vaso del mismo fluido, el agua subirá en él á una altura nm igual á esta diferencia. Si la altura h del depósito fuese tan grande que se tuviera $0,75h>a$ (lo que para el agua sucederia si h excediese de unas 590 pulgadas ó llegase á 50 pies), la presion interior seria negativa, las capas de fluido tenderian á separarse de las paredes del tubo, no saldria el agua á caño lleno, y el tubo adicional no produciria aumento de gasto. Lo mismo ocurriria en el caso de que $a=0$ ó de que se verificase en el vacío la salida del agua.

67. En los demas casos, si se abrieren pequeños agujeros en el paraje del tubo correspondiente á la seccion contraida, no solamente no saldrá por ellos el agua, sino que en virtud de dicha diferencia se introducirá por ellos el aire en lo interior del tubo, hará que se separe el fluido de sus paredes, y anulará el aumento de gasto del tubo adicional.

68. En los demas parajes del tubo donde la velocidad es $0,82\sqrt{2gh}$, la presion interior es debida á la altura $a+0,33h$: su exceso sobre la exterior es debido solamente á poco mas de $\frac{1}{3}$ de la altura del depósito. Si esta altura no es muy grande, si es por ejemplo de 48 pulgadas, la presion causada por el fluido seria próximamente $\frac{1}{27}$ de la presion atmosférica, y aun cuando se abriese un agujero en las paredes, bastaria la adherencia de las moléculas fluidas para contrapesar esta diferencia y hacer que no se escapase el agua por dicho orificio. Todos estos resultados han sido confirmados por la experiencia.

69. A veces se aplican tubos prismáticos rectangulares á una cara inclinada del depósito, fig. 13, para dirigir el agua á los cajones ó cangilones de las ruedas hidráulicas. Se calculará el gasto por estos tubos tomando por altura del agua para cada uno la distancia cd del nivel del depósito á la horizontal ab que pasa por su borde inferior, y sumados todos los productos se multiplicará la suma por el coeficiente 0,75. Si por ejemplo

$\omega, \omega' \omega''$ son las secciones trasversales de los tubos,
h, h', h'' las alturas de agua para cada uno contadas segun acabamos de decir,

el gasto Q por estos tres tubos será

$$Q=0,75\sqrt{2g}\,(\omega\sqrt{h}+\omega'\sqrt{h'}+\omega''\sqrt{h''}).$$

Tubos cónicos convergentes.

70. En la salida del agua por estos tubos, fig. 14, cuando no es muy sensible el ángulo que forman las dos generatrices opuestas de la superficie cónica, ocurren circunstancias análogas á las de los tubos cilíndricos. Hay contraccion de la vena fluida al salir del depósito al tubo, hay aumento consiguiente de velocidad, y los filetes fluidos salen paralelos por el borde exterior. Pero si dicho ángulo pasa de 12°, la convergencia de los filetes contiguos á las paredes del tubo ocasiona una contraccion exterior en la vena, y en pasando de 20°, que es próximamente el ángu-

lo de la vena contraida en el caso de las paredes delgadas, la contraccion desaparece y se recae en las mismas circunstancias que si no existiese tubo adicional y las paredes del depósito presentasen su concavidad al interior.

Mientras por consiguiente el ángulo de convergencia exceda de 20°, el problema del gasto y demas circunstancias del movimiento se halla comprendido en el resuelto para el caso de paredes delgadas, faltando solamente hallar por experiencia la relacion m de la seccion contraida á la de la boca del orificio para sustituirla en aquellas fórmulas. Mas abajo de este límite el gasto es afectado no solo por esta contraccion, sino tambien por la alteracion que experimenta la velocidad; pero en siendo menor de 12°, la contraccion exterior apenas es sensible y el gasto solo es afectado de la alteracion que en la velocidad ocasiona la contraccion interior.

71. Las experiencias que se han hecho para hallar el coeficiente m del gasto y el coeficiente n de la velocidad á su salida por la boca CD del tubo en las fórmulas $Q=m\omega\sqrt{2gh}$, y $v=n\sqrt{2gh}$, en que ω es la área de la boca del tubo y h la altura del agua sobre su centro, dan los resultados siguientes:

Angulo de convergencia.		Coeficiente del gasto.	Coeficiente de la velocidad.
0°	0′	0,82	0,82
1°	44′	0,87	0,86
3	22	0,89	0,88
4	10	0,91	0,90
5	30	0,92	0,92
7	52	0,93	0,93
9	8	0,94	0,94
10	34	0,94	0,95
12	»	0,95	0,95
13	32	0,94	0,96
14	44	0,93	0,96
16	16	0,93	0,95
19	18	0,93	0,96
23	2	0,92	0,96
29	56	0,90	0,97
40	18	0,88	0,98
49	6	0,85	0,99

72. La relacion de la longitud al diámetro exterior del tubo influye tambien en el gasto. Para que sea este el mayor posible debe ser la longitud algo mas del doble de dicho diámetro.

73. Sobre el gasto hecho por grandes tubos piramidales hay las tres experiencias que siguen:

La base mayor de la pirámide truncada era un rectángulo de $31^p,48$ por 42^p.

La menor otro de $5^p,81$ por $8^p,18$.

La longitud $125^p,88$.

Las caras laterales opuestas formaban ángulos de 11° 38′ y 15° 18′.

La altura del agua sobre el centro de la base menor era de 125^p,88.

El coeficiente del gasto era

en la primera experiencia.......... 0,987
en la segunda.................. 0,976
en la tercera.................. 0,979

Coeficiente medio........ 0,98

Tubos cónicos divergentes.

74. Los tubos cónicos cuyo diámetro de salida es mayor que el de entrada, ofrecen fenómenos análogos tambien á los cilíndricos, mientras el ángulo de divergencia no exceda de unos 14°. Mas allá de este límite la vena fluida se separa totalmente de sus paredes, y verifica su salida como si tal tubo no existiese. Pero cuando es menor el ángulo, el consumo de agua que ocasionan es mayor que el de cualquier otro tubo adicional.

75. Las experiencias para determinar el coeficiente m del gasto en la fórmula

$$Q=m\omega\sqrt{2gh}$$

en que ω es la área de la seccion AB, fig. 15, del orificio, se hicieron con tubos cuya embocadura tenia la forma de la vena contraida. AB era igual á 1^p,75; ab=1^p,45; el cuerpo del tubo $abCD$ variaba en longitud y abertura: la altura del agua era de 37^p,90 y se contaba el tiempo en que se llenaba un vaso de 10944^{ppp}.

Angulo de divergencia.	Longitud del tubo. *Pulgadas.*	Tiempo.	Coeficiente m	OBSERVACIONES.
3° 30′	4,78	27″,5	0,93	
4 38	14,38	21	1,21	Vena muy irregular.
4 38	19,81	21	1,21	La vena no llenaba el tubo.
4 38	19,81	19	1,34	Para que le llenase se habia introducido en él un cuerpo prominente.
5 44	7,58	25	1,02	
5 44	2,54	31	0,82	La boca de salida era igual á la de entrada.
10 16	11,37	28	0,91	La vena no llenaba el tubo.
10 16	1,94	28	0,91	Vena muy irregular.
14 14	1,94	42	0,61	Vena separada de las paredes, como con sola la embocadura.

Venturi, autor de estas experiencias, sienta que el tubo cónico que da el mayor gasto, debe tener de longitud 9 veces el diámetro menor y 5° 6′ de divergencia. El coeficiente m adquiere entonces el valor m=1,46.

Tubos cilíndricos y cónicos divergentes combinados.

76. Para hacer ver la influencia que tienen en el gasto los tubos cónicos divergentes aplicados á los extremos de los tubos cilíndricos, y las embocaduras convergentes aplicadas á los extremos de entrada de los mismos tubos, se tomaron varios de diferente longitud y de 1^{p}12 de diámetro. Se emplearon primeramente solos: despues aplicándoles á la entrada la embocadura M, fig. 16; y últimamente, aplicando al extremo de salida los tubos N de la forma recomendada por Venturi.

77. Los resultados de las experiencias estan consignados en la siguiente tabla:

Longitud del tubo.	Coeficiente del gasto con el tubo cilíndrico solamente.	RELACION CON EL GASTO DEL TUBO SOLO DEL GASTO QUE SE OBTIENE	
		Con la embocadura.	*Con el tubo cónico divergente.*
0	0,62		
1 diámetro	0,62	1,56	
3	0,82	1,15	1,35
12	0,77	1,13	1,27
24	0,73	1,10	1,24
36	0,68	1,09	1,23
48	0,63	1,09	1,21
60	0,60	1,08	1,17

Ella manifiesta,

1º La ley segun la cual va menguando el gasto al paso que crece la longitud de los tubos, y sirve de complemento á lo que se dijo en el núm. 65. Cuando sea mayor la longitud de los tubos se calculará el gasto por otras fórmulas que presentaremos mas adelante en el capítulo 6º de la segunda seccion.

2º Que el aumento de gasto causado por la embocadura á la entrada de la cañería, va siendo tanto menor cuanto mayor es la longitud de esta.

3º Que tambien mengua, y aun con mayor rapidez, el efecto de los tubos cónicos á la salida de la cañería segun va creciendo la longitud de esta. Se hizo una experiencia con un tubo cuya longitud era de 240 diámetros, y no se notó ninguna diferencia en el gasto de aplicar ó no el tubo divergente.

Aplicando inmediatamente este último tubo al orificio del depósito, el coeficiente del gasto teórico era 1,18. Aplicándole á la embocadura sin tubo cilíndrico intermedio, subió el coeficiente á 1,55. Por último aplicando la embocadura sola, era dicho coeficiente igual á 0,92. Asi el efecto de la aplicacion del tubo cónico á la embocadura fue aumentar el gasto en la relacion de 0,92 á 1,55 ó de 1 á 1,68.

CAPITULO II.

DE LA SALIDA DEL AGUA CUANDO EL DEPÓSITO SE VACIA.

78. Si un depósito que tiene abierto un orificio no recibe nueva agua ó recibe menos de la que gasta, el nivel superior descenderá gradualmente y acabará por vaciarse del todo.

Suponiendo las circunstancias expresadas en el núm. 44, conservando aquellas denominaciones, y llamando ademas

t el tiempo que tarda en bajar la superficie del depósito desde CE á DF, fig. 5;

z la altura variable DG del depósito sobre el centro del orificio al cabo del tiempo t;

Ω la área de la seccion trasversal DF del depósito, supuesta determinada en funcion de z,

el volúmen de fluido que sale por el orificio en el instante dt será $m\omega v dt$; la cantidad en que bajará el nivel DF será dz y dicho volúmen será expresado tambien por Ωdz. Igualando estos dos valores, y teniendo presente que las variaciones de z y de t deben ser de signos contrarios, porque z mengua al paso que crece t, se halla

$$m\omega v dt = -\Omega dz, \quad ó \quad dt = -\frac{\Omega dz}{m\omega v};$$

esta ecuacion integrada da

$$t = \int -\frac{\Omega dz}{m\omega v} + const.,$$

ó si se pone en vez de v la velocidad de salida por el orificio que es $\sqrt{2gz}$ (núm. 44),

$$t=\int -\frac{\Omega dz}{m\omega\sqrt{2gz}}+const.:$$

la constante se determinará atendiendo al valor que toma z al principio del movimiento ó cuando $t=0$.

79. Si el depósito es de figura prismática, la área Ω es constante, y la fórmula anterior se convierte en

$$t=-\frac{2\Omega\sqrt{z}}{m\omega\sqrt{2g}}+const.;$$

teniendo presente que al principio del movimiento la altura CG del nivel era h, lo que da $const.=\frac{2\Omega\sqrt{h}}{m\omega\sqrt{2g}}$, viene á ser

$$t=\frac{2\Omega}{m\omega\sqrt{2g}}(\sqrt{h}-\sqrt{z}):$$

expresion del tiempo que tardará en bajar el fluido la cantidad $h-z$ en un depósito prismático.

80. Para tener el tiempo que tardará en vaciarse enteramente, se hará $z=0$ y vendrá

$$t=\frac{2\Omega\sqrt{h}}{m\omega\sqrt{2g}} \quad \text{ó} \quad t=\frac{\Omega}{m\omega}\sqrt{\frac{2h}{g}};$$

pero no debe esperarse que esta fórmula coincida con los resultados de la experiencia, porque al acercarse el nivel del fluido al fondo en que está abierto el orificio, se forma un embudo y el aire angosta el orificio de salida, y tambien porque al fin de la evacuacion la atraccion molecular liga unas con otras las partículas del fluido que entonces sale goteando.

81. Despejando z en la penúltima ecuacion, la expresion del descenso del depósito al cabo del tiempo t es

$$h-z=\frac{mt\omega\sqrt{2g}}{\Omega}\left(\sqrt{2g}-\frac{mt\omega\sqrt{2g}}{4\Omega}\right),$$

y si se multiplica por Ω, se tendrá el volúmen de agua que sale en el mismo tiempo, que es

$$\Omega(h-z)=mt\omega\sqrt{2g}\left(\sqrt{h}-\frac{mt\omega\sqrt{2g}}{4\Omega}\right).$$

82. Cuando el orificio esté abierto en una pared vertical, se tomará para valor de m el que corresponda según el núm. 46 á la altura media de la superficie del depósito entre la del principio y la del fin de la salida. En las compuertas de las exclusas se hará siempre $m=0,70$ según previene D'Aubuisson en vista de sus experiencias.

83. Si el depósito no es prismático en el intervalo $h-z$, la ecuacion del núm. 78 solo se podrá integrar cuando se conozca la funcion que es de z la área Ω de la seccion trasversal, y esto se consigue en un corto número de casos. Lo que se puede hacer en la práctica es dividir este intervalo en partes iguales suficientemente pequeñas para que cada tonga de fluido pueda considerarse como prismática siendo su base la media aritmética entre sus bases superior é inferior, y aplicar despues las anteriores fórmulas á cada tonga considerándola como si fuese la superior. La suma de los resultados que asi se obtengan dará con bastante aproximacion el que se busca.

Supongamos, por ejemplo, un estanque cuya superficie fluida sea de 200000 pies cuadrados á una altura de 9 pies sobre el centro de una abertura cuadrada de 6 pulgadas de lado hecha en su fondo, y que se quiera saber cuánto tiempo será necesario para que baje el nivel 4 pies desde que se destape el orificio.

Se considerará dividida esta altura en dos partes de á 2 pies: se construirán con exactitud el plano y varios perfiles del estanque para deducir la seccion media de cada

una de las dos tongas, que supondremos de 180000 pies cuadrados la primera, y de 150000 la segunda.

Para la primera se tiene $h=108^p$, $z=84$, $\Omega=25920000$, $\omega=36$; el coeficiente, segun el núm. 46, es $m=0,60$ y

$$t=\frac{2.25920000}{0,60.36.29,05}(\sqrt{108}-\sqrt{84})=1013643''.$$

Para la segunda en que $h=84$, $z=60$, $\Omega=21600000$, $\omega=36$, $m=0,60$, se halla del mismo modo

$$t=974127''.$$

El tiempo total que se busca es por consiguiente de 1987770″ ó de 23 dias, 9 minutos y 30 segundos.

84. Consideremos ahora el caso en que reciba el depósito un caudal de agua menor que el que vierte por el orificio. Llamando Q' el caudal del afluente en cada segundo, y conservando las notaciones del núm 78, el volúmen $m\omega v dt$ de fluido que sale del orificio deberá ser igual al volúmen Ωdz disminuido en el volúmen $Q'dt$ que en el mismo instante recibe el depósito; y la ecuacion

$$m\omega v dt=-\Omega dz+Q'dt$$

representará las circunstancias del movimiento del agua. Despejando dt sale

$$dt=-\frac{\Omega dz}{m\omega\sqrt{2gz}-Q'},$$

y

$$t=\int-\frac{\Omega dz}{m\omega\sqrt{2g}.\sqrt{z}-Q'}+const.$$

Si el depósito es prismático, se podrá sacar Ω fuera del signo $\int$; y haciendo $m\omega\sqrt{2g}.\sqrt{z}-Q'=x$ que da

$$dz=\frac{x+Q'}{m^2\omega^2 g}\,dx,$$

se tiene

$$t=-\frac{\Omega}{m^2\omega^2 g}\int\left(dx+Q'\frac{dx}{x}\right)+const.;$$

efectuando la integracion y observando que el logaritmo hiperbólico es igual al logaritmo ordinario multiplicado por $\frac{1}{M}$ ó por 2,303, se halla

$$t=-\frac{\Omega}{m^2\omega^2 g}(x+2,303Q'\log.x)+const.;$$

ó reponiendo el valor de x y atendiendo á que en el principio del movimiento se tiene $t=0$, $z=h$ y á que por consiguiente

$$const.=\frac{\Omega}{m^2\omega^2 g}[m\omega\sqrt{2g}\sqrt{h}-Q'+2,303Q'\log.(m\omega\sqrt{2g}\sqrt{h}-Q')],$$

$$t=\frac{\Omega}{m^2\omega^2 g}\left(m\omega\sqrt{2g}(\sqrt{h}-\sqrt{z})+2,303Q'\log.\frac{m\omega\sqrt{2gh}-Q'}{m\omega\sqrt{2gz}-Q'}\right),$$

ó por último

$$t=\frac{2\Omega}{m\omega\sqrt{2g}}(\sqrt{h}-\sqrt{z})+\frac{2,303\Omega}{m^2\omega^2 g}Q'\log.\frac{m\omega\sqrt{2gh}-Q'}{m\omega\sqrt{2gz}-Q'};$$

y este será el tiempo que tardará en bajar la superficie fluida al nivel indicado por la altura z ó la cantidad $h-z$.

85. Para buscar la altura z á que deberá hallarse el nivel del depósito al fin de un tiempo dado t, seria preciso despejar z en esta última ecuacion. Pero esto no puede hacerse inmediatamente. En las aplicaciones convendrá hallar z, prescindiendo del afluente ó del segundo término del segundo miembro. Se disminuirá un poco este valor y se sustituirá en todo el segundo miembro despues de pasar á este el término t. Si no se reduce á cero, el signo que resulte indicará si el valor supuesto de z debe aumentarse ó disminuirse. Haciendo de esta manera sustituciones sucesivas, se llegará pronto á un valor de z que satisfaga muy próximamente á esta ecuacion. El mismo método se seguirá en todas las ocasiones en que los procedimientos ordinarios

del álgebra no basten para despejar las incógnitas que se deseen.

86. En el caso de que sin recibir el depósito ningun afluente salga el agua por un vertedor rectangular, lo que sucede en las exclusas construidas para barrer el fondo de los puertos (*), llamando z la altura variable del nivel del depósito sobre el umbral del vertedor, la velocidad media de salida será en cada instante, núm. 60, $v=\frac{2}{3}\sqrt{2gz}$ y la área correspondiente al vertedor en la seccion contraida $\omega=maz$. Si se sustituyen estos valores en la ecuacion del núm. 78, se tiene

$$dt=-\frac{\Omega dz}{\frac{2}{3}maz\sqrt{2gz}};$$

que integrada, atendiendo á que cuando $t=0$ es $z=h'$, da

$$t=\frac{3\Omega}{ma\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}-\frac{1}{\sqrt{h'}}\right)$$

para el tiempo en que bajará el depósito desde la altura h' á la altura z. Se tomará en esta fórmula para m el coeficiente medio 0,61 indicado en el núm. 60. No se puede calcular por ella el tiempo total que tardará en bajar el fluido al nivel del umbral, porque $z=0$ da $t=\frac{1}{0}$; pero se puede suponer el nivel inferior bastante próximo (á 2 pulgadas por ejemplo) á dicho nivel, y usar de la fórmula suponiendo $z=2$ pulgadas.

87. Puede suceder que el orificio, cubierto por el agua del depósito al principio de la salida, se convierta despues en vertedor. Para determinar entónces el tiempo de su evacuacion hasta un nivel dado, que no podrá ser inferior al que se acaba de prefijar, se calculará separadamente la duracion de la salida desde el principio hasta el instante en que enrase el nivel con el borde superior del orificio segun la fórmula del núm. 79, y despues desde este instante hasta el nivel inferior dado, segun la anterior fórmula.

(*) Los franceses las llaman *écluses de chasse*; nosotros podriamos darles el nombre significativo de *exclusas barrederas*.

CAPITULO III.

DEL MOVIMIENTO DE UN FLUIDO CUANDO PASA DE UN DEPÓSITO A OTRO.

88. En los casos considerados hasta ahora se ha supuesto que el orificio vertia su agua al aire libre; la presion atmosférica sobre el orificio se equilibraba próximamente con la ejercida en la superficie del depósito, y no tenia influencia en el movimiento del agua. Pero si el fluido sale á otro depósito en que ya hay una cierta altura de agua que cubra el orificio, la velocidad de salida no será debida á la altura del depósito sobre el centro del orificio, sino á la diferencia entre esta altura y la del depósito inferior sobre el mismo centro.

Consideremos en primer lugar el caso en que ambos depósitos conserven sensiblemente su propio nivel, como sucede cuando un tramo de canal surte de agua al tramo inmediato por una compuerta colocada entre los dos, que supondremos sumergida.

Llamando

h la altura Dd, fig. 17, de la superficie del agua superior sobre el centro del orificio;

h' la altura Ed de la superficie inferior sobre el mismo centro,

la velocidad media del agua á su salida del orificio será $\sqrt{2g(h-h')}$, y el gasto por segundo

$$Q=m\omega\sqrt{2g(h-h')};$$

el valor del coeficiente m es segun experiencia el mismo del núm. 46. En las compuertas de exclusas se hará como entonces $m=0,625$ cuando sea una sola, y $m=0,55$ cuando sean dos próximas las bocas abiertas.

89. Si la altura $h-h'$ ó DE es pequeña respecto de la dimension vertical del orificio y se desea mayor exactitud en la valuacion de la velocidad, se harán las sustituciones convenientes en la fórmula del núm. 56.

90. Puede suceder que el nivel del depósito inferior conserve una posicion intermedia tal como ec, fig. 18, entre los bordes superior é inferior del orificio. En tal caso se calculará primero el gasto considerando la porcion Ae de orificio segun la fórmula anterior, tomando por $h-h'$ la diferencia De de las alturas de los niveles sobre el centro de Ae, y despues el que corresponde á la porcion Be por la fórmula del núm. 44 ó del 54, como que se halla enteramente al aire libre, poniendo por h la altura aD sobre su centro. Sumando los dos resultados se tendrá el gasto que se busca.

91. Supongamos en segundo lugar que manteniéndose á un mismo nivel CD, fig. 19, el depósito superior, se vaya llenando el inferior al paso que sale el agua. Sea EF el nivel de este depósito al principio del tiempo t.

Llamando

h la diferencia DE de las alturas de los dos depósitos sobre el centro del orificio al principio de la salida;

z la diferencia variable DG de las mismas alturas al cabo del tiempo t;

Ω la área de la seccion horizontal del depósito inferior;

ω la área del orificio;

m el coeficiente de reduccion;

se observará como en el núm. 78 que el volúmen que sale por el orificio en cada instante dt es $m\omega v dt$ ó bien $m\omega\sqrt{2gz}.dt$; que la altura á que sube el nivel del depósito inferior en el mismo instante es dz; y que dicho volúmen es tambien representado por Ωdz. Se llegará por consiguiente á la misma ecuacion de aquel número, que en el caso de ser prismática la figura del depósito inferior, se convierte como en el núm. 79 en

$$t=\frac{2\Omega}{m\omega\sqrt{2g}}(\sqrt{h}-\sqrt{z});$$

el tiempo que tardará en llenarse hasta el nivel CD es

$$t=\frac{2\Omega}{m\omega\sqrt{2g}}\sqrt{h}.$$

92. Si al principio de la salida está enteramente descubierto el orificio, se calculará separadamente el tiempo que tardará en subir el agua hasta el nivel del centro d del orificio, fig. 20, segun la fórmula del núm. 44

$$Qt=tm\omega\sqrt{2gh},$$

que se reduce á

$$t=\frac{\Omega h'}{m\omega\sqrt{2gh}},$$

en que $Ee=h'$, $Dd=h$; y despues el tiempo que tarde en subir desde este nivel hasta el del depósito superior, segun la última fórmula del número precedente.

Estos problemas tienen útil aplicacion para determinar el tiempo en que se llena la balsa de una exclusa de los canales de navegacion.

Suponiendo, por ejemplo, la área de la seccion horizontal del cuenco $\Omega=4194$ pies cuadrados; la área de cada postiguillo $\omega=8^{pp},0966$ y la de dos que se abren á un tiempo $16^{pp},1932$; la altura del nivel superior sobre el

centro del postiguillo $h=7^p$; la del mismo centro sobre el nivel del tramo inferior $h'=1^p,66$; por estar abiertos ambos postiguillos $m=0,55$; se tendrá para el tiempo que tardará en subir el agua hasta el centro de los postiguillos

$$t'=\frac{\Omega h'}{m\omega\sqrt{2g.7}}=\frac{4895}{0,55.2.8,0966.8,378.2,646}=24'',79:$$

y desde este centro hasta el nivel del tramo superior,

$$t''=\frac{2\Omega\sqrt{h}}{m\omega\sqrt{2g}}=\frac{2.4194.\sqrt{7}}{0,55.2.8,0966.\sqrt{2g}}=297'',41;$$

y el total para llenar la balsa $t=5'\,22''$.

La observacion directa dió $5'\,30''$.

93. Consideremos en tercer lugar el caso en que ninguno de los dos depósitos reciba nueva agua, y baje el nivel de esta en el superior al paso que suba en el inferior. Sean CD, EF, fig. 21, estos niveles antes de levantarse la compuerta, y $C'D'$, $E'F'$ la posicion que toman al cabo del tiempo t corrido desde el instante en que se abre.

Llamando

h, h' las alturas iniciales DD, Ed del depósito superior y del inferior sobre el centro del orificio;

z, z' las alturas variables $D'd$, $E'd$ de ambas al cabo del tiempo t;

Ω, Ω' las áreas de las secciones horizontales de los depósitos, supuestas constantes;

se tendrá, aplicando el raciocinio del núm. 78,

$$dt=-\frac{\Omega dz}{m\omega v};$$

ó poniendo por v su valor $\sqrt{2g(z-z')}$,

$$dt=-\frac{\Omega dz}{m\omega\sqrt{2g}\sqrt{z-z'}}.$$

El volúmen de fluido que en el instante dt entra en el vaso inferior y cuya expresion es $\Omega' dz'$, es igual al volúmen Ωdz que sale en el mismo instante: se tiene pues otra ecuacion

$$\Omega dz=-\Omega' dz',$$

que integrada y determinando la constante por la condicion de que cuando $z=h$ es $z'=h'$ da

$$\Omega z+\Omega' z'=\Omega h+\Omega' h'.$$

Eliminando z' de estas dos ecuaciones, se podrá integrar la primera; y observando que cuando $t=0$ es $z=h$, se llegará á

$$t=\frac{2\Omega\sqrt{\Omega'}}{m\omega(\Omega+\Omega')\sqrt{2g}}\left(\sqrt{\Omega'(h-h')}-\sqrt{(\Omega+\Omega')z-\Omega h-\Omega' h'}\right):$$

expresion del tiempo que tardará en bajar á la altura z el depósito superior, ó subir á la altura z' el inferior.

94. Si se quiere saber el tiempo necesario para que el fluido se halle al mismo nivel en los dos vasos, se hará $z=z'=\frac{\Omega h+\Omega' h'}{\Omega+\Omega'}$, y el valor anterior se convierte en

$$t=\frac{2\Omega\Omega'\sqrt{h-h'}}{m\omega(\Omega+\Omega')\sqrt{2g}}.$$

95. En el caso de que no haya agua al principio en el depósito inferior ó que su nivel esté mas bajo que el centro del orificio, se calculará primero el tiempo que tardará en llenarse hasta que el nivel enrase con dicho centro. El volúmen de este fluido, representando por h'' la altura del centro del orificio sobre el nivel del depósito inferior, es $\Omega' h''$; igualándole con el que ha salido del depósito superior, representado por la fórmula del núm. 81, se saca para este tiempo

$$t=\frac{2\sqrt{\Omega}}{m\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{\Omega h}-\sqrt{(\Omega h-\Omega' h'')}\right):$$

se toma la segunda raiz para el valor de t, porque cuanto mayor sea $\Omega' h''$ mayor debe ser tambien t.

El tiempo desde este instante hasta que suba el nivel á una altura dada se valuará por una de las anteriores fórmulas.

Una de las principales aplicaciones de este problema ocurre cuando en las balsas contiguas de los canales de navegacion se quiere calcular el tiempo que tardará en llenarse la balsa inferior á expensas de la superior, operacion necesaria al paso de los barcos.

Sea por ejemplo

la área de la balsa superior......... $\Omega = 2640^{pp},40$
la de la inferior..................... $\Omega' = 2769,30$
la de los dos orificios, uno de cada hoja. $\omega = 16,09$
la altura del nivel superior sobre el centro del orificio............... $h = 14^{p},86$
la altura del centro del orificio sobre el nivel del tramo inferior........... $h'' = 2^{p},33$
por salir el agua por los dos orificios á un tiempo........................ $m = 0,55$

El tiempo que tardará en subir el agua hasta el centro del orificio será, hechas las sustituciones en la fórmula anterior,

$$\frac{102,83}{74,13}(198,09-181,05)=23'',64.$$

El que se gastará hasta ponerse á nivel las dos balsas, puesto que partimos del punto en que el tramo inferior está á la altura del centro del orificio, y que por lo mismo $h'=0$, será en virtud de la última fórmula del núm. 94,

$$\frac{2\Omega\Omega'\sqrt{h}}{m\omega(\Omega+\Omega')\sqrt{2g}}=140'',57=2'\ 20'',57$$

la observacion dió para este último $2'29''$. El tiempo total gastado en ponerse á un nivel las dos balsas es pues de $2'\ 44''$.

SECCION SEGUNDA.

TEORÍA DE LAS CORRIENTES.

96. La naturaleza nos presenta las corrientes de agua en los rios y arroyos: el hombre les ha abierto lechos artificiales para su uso, ya dejándolos descubiertos por la parte superior, en cuyo caso se llaman *canales*, ya cerrándolos en forma de cilindros para conducir el agua á parages determinados.

Concibiendo que cualquiera de estas corrientes proviene de un depósito cuya altura de agua permanece constante, la incompresibilidad del fluido hace que la cantidad que salga de este depósito en un tiempo dado, sea la misma que durante igual tiempo pasará por una seccion cualquiera perpendicular al eje de la corriente. El gasto es pues el mismo en todas las secciones mientras no varíe la altura del depósito: las velocidades de las diferentes moléculas fluidas serán las mismas y tendrán la misma direccion al llegar á una seccion dada, aun cuando varíen de una seccion á otra; y el movimiento de las corrientes será el que hemos caracterizado con el nombre de *movimiento permanente*.

Las circunstancias de este movimiento, esto es, las relaciones que ligan la velocidad de la corriente, el caudal de agua que lleva, la pendiente de su lecho y las dimensiones y figura de su álveo, van á ser el asunto de esta seccion.

Se tratará 1.° de averiguar la velocidad de una corriente deduciéndola de la velocidad de una ó de varias moléculas suyas, medida directamente: 2.°, de valuar la cantidad de agua que lleva: 3.°, de establecer la ecuacion general de su movimiento: 4.°, de aplicarla á la resolucion

de problemas relativos á los canales: 5.°, á los rios; y 6.°, á las cañerías.

CAPITULO PRIMERO.

DE LA VELOCIDAD DE LAS CORRIENTES.

97. Si las paredes del lecho y la accion de la atmósfera no ofreciesen resistencia al movimiento del agua por el plano inclinado de su fondo, es evidente que no existiendo otra fuerza que la gravedad para impeler á las moléculas fluidas en el sentido de este plano, su movimiento seria uniformemente acelerado. Pero el hecho es que al correr el agua por un lecho cualquiera se aplica á sus paredes una capa delgada de este fluido y las moja penetrando sus poros y engranándose en ellos. La capa contigua á esta resbala y se roza con ella, sus moléculas se engranan, y en virtud de esta adherencia se retarda su velocidad. Un efecto semejante, aunque cada vez menos notable, tendrá lugar sucesivamente para las otras capas hasta llegar al filete fluido mas distante de las paredes, cuya velocidad sufrirá menos disminucion que todos los demas. En un tubo circular la velocidad máxima corresponde á la molécula del centro: lo mismo sucede con corta diferencia en los rios y canales cuando su parte superior está cubierta de hielo, produciendo este el mismo efecto resistente que las demas paredes del lecho. En la temperatura ordinaria y en tiempo sereno, la capa de aire inmóvil que cubre la superficie de la corriente, frota tambien con ella y da lugar á una resistencia análoga á la de las paredes, bien que apenas sea sensible. La velocidad mayor corresponde siempre al punto medio de la vertical en donde es mayor la profundidad; pero difiere muy poco de la que tiene lugar en la superficie.

98. De este raciocinio, que no es mas que la explicacion de los resultados de numerosas experiencias, se deduce que cada punto m, fig. 22, de la seccion de una masa fluida goza de una velocidad relativa que solo depende de su posicion, y que si se conociese la ley segun la cual varían las velocidades de las diversas moléculas segun su distancia á las paredes ó á la molécula central, seria fácil representar algebráicamente la velocidad de cada una. Sumando despues todas estas velocidades y dividiendo la suma por el número de ellas, ó lo que equivale, dividiendo por la área de la seccion el volúmen de agua que pasa por ella en un segundo, se tendrá la *velocidad media* de la corriente; velocidad tal, que si ella animase igualmente á todos los puntos de la seccion, el gasto de agua seria el mismo que el que efectivamente tiene lugar.

99. Se han hecho muchas experiencias con la mira de deducir la *velocidad media* de una corriente de la que se observa en algunas de sus moléculas, y singularmente en las de la superficie, que son mas fáciles de medir. Prony, que ha discutido 38 experiencias de Dubuat hechas en dos canales de 154 pies de largo, uno rectangular de $23^p,68$ de ancho, y otro trapezoidal de $6^p,72$ de ancho en el fondo ó solera con 1,36 de talud, variando la altura del agua de $2^p,32$ hasta $11^p,76$, y la velocidad desde 7^p hasta 56^p, representa sus resultados por la fórmula

$$v = \frac{v'(v'+117,65)}{v'+135,80} \ (*)$$

(*) Para evitar errores, debemos advertir que esta y todas las demas fórmulas de las corrientes que inserta D. José Mariano Vallejo en su apreciable tratado de las aguas estan por traducir á medidas españolas, y no pueden emplearse como él lo hace, en los ejemplos que les siguen.

en que v es la velocidad media en pulgadas,

v' la que tiene lugar en el medio de la superficie de la corriente.

Mientras la velocidad v' de la superficie esté comprendida entre 10 y 60 pulgadas, el valor anterior se reduce muy próximamente á $v=\frac{4}{5}v'$.

Llamando v'' la velocidad de una corriente en el medio del fondo ó muy cerca del fondo, las mismas experiencias de Dubuat le condujeron á representarla por la expresion

$$v''=2v-v';$$

que entre los límites de v' acabados de indicar difiere poco de

$$v''=\frac{3}{4}v, \quad \text{ó} \quad v''=\frac{3}{5}v'.$$

100. Otros ingenieros, entre los cuales se cuentan Funck, Woltman, Brunnings y Eytelwin, se han ceñido á investigar la ley de variacion de la velocidad en una misma vertical, y por consiguiente la relacion entre la velocidad media de las moléculas de esta vertical, y la que tiene lugar en la molécula superior de la misma; pero los resultados difieren demasiado unos de otros para que se pueda dar por determinada esta ley. Woltman establece para velocidad de un punto m de la vertical HK la ordenada de una parábola cuyo eje esté en esta vertical, y cuyas ordenadas en los puntos H,K sean las velocidades correspondientes á estos puntos.

Eytelwein despues de confesar la imposibilidad de asignar con seguridad la ley de disminucion de esta velocidad, establece por via de aproximacion que mengua en progresion aritmética y en $\frac{1}{40}$ de la que goza en la superficie por cada metro de profundidad, lo que equivale á 0,00058 de dicha velocidad por cada pulgada de profundidad.

Los resultados de 18 experiencias hechas por Brunnings en el Rin y el Waal indican que la velocidad media varía entre 0,965 y 0,892 de la que tiene el extremo superior de la misma vertical. Las velocidades de las moléculas fueron medidas de pie en pie de profundidad. Otra série de experiencias hechas por Jimenez en el rio Arno da por resultado el número 0,919 para esta relacion.

101. Ultimamente, el ingeniero Raucourt presentó á la Academia de las Ciencias de Paris los resultados de dos séries de experiencias hechas en el Neva en el invierno de 1824 hallándose helada su parte superior, y en el verano de 1826 cuando el agua corria libremente. Segun ellas, la velocidad máxima en una misma vertical correspondia siempre al punto medio de la altura, y aun á veces un poquito mas abajo. La mayor de todas estas se verificaba en el punto medio correspondiente á la mayor profundidad del agua. Cuando el rio estaba helado la velocidad decrecia en una misma vertical desde el medio hácia el fondo y hácia la parte superior, segun una ley que le pareció bien expresada por los valores de las ordenadas de una elipse, cuyo semieje mayor fuese la velocidad máxima, y cuyas ordenadas en el fondo y en la superficie fuesen las velocidades en estos puntos (*). En una misma horizontal la velocidad decrecia mas rápidamente desde el medio hácia ambas orillas, donde era nula, y representó la ley de esta disminucion por la ecuacion de una elipse en que uno de los semiejes era la velocidad en el punto correspondiente á la mayor profundidad, y el otro semieje la distancia de este punto á la orilla respectiva.

(*) En la mayor vertical, que era de 63 pies ingleses, la velocidad del punto medio era de $2^p,7$; la de la superficie de $1^p,11$, y la del fondo de $1^p,65$. La relacion entre esta última velocidad y la máxima viene á ser 0,61.

102. En las experiencias del verano la ley de variacion en el sentido horizontal no se alteraba. Tambien permanecia la misma en el sentido vertical en la parte inferior al punto medio de la profundidad; pero desde este punto hácia la superficie la disminucion de velocidad era muy pequeña en tiempo de calma, y la velocidad en la superficie era casi igual á la velocidad máxima.

103. La accion del viento modificaba considerablemente las velocidades en esta parte superior. Si era opuesta á la corriente, la velocidad en la superficie se disminuia hasta llegar á ser poco mayor que la del fondo. Si su direccion era en el sentido de la corriente, la velocidad en la superficie llegaba á ser mayor que la velocidad máxima; pero esta existia siempre, y la curva formada por los extremos de las ordenadas que representaban las velocidades intermedias, tenia de consiguiente una inflexion. Estas observaciones hacen ver que la influencia del viento en la distribucion de las velocidades y en el gasto de agua de una corriente es demasiado considerable para que sea permitido prescindir de ella en las operaciones que tengan por objeto su determinacion.

104. Con la mira de sacar partido de estas experiencias consideremos una corriente en el caso del núm. 102 cuya seccion sea el trapecio CL, fig. 23. Si se concibe que por todos los puntos de una seccion trasversal se tiran horizontales iguales á las velocidades respectivas, los extremos de estas ordenadas formarán una superficie curva: el volúmen comprendido entre esta superficie y el plano de la seccion será el gasto de agua por segundo ó el *caudal* de la corriente. Las secciones horizontales de esta superficie serán semielipses GNH, cuyos semiejes son la semianchura FH respectiva del lecho, y la FG velocidad del punto medio F.

Las secciones verticales paralelas á la corriente, tiradas por su eje, se compondrán de una línea recta vertical RD' en la mitad superior, y en la inferior de una curva $D'G'K$, que en razon de su poca amplitud y por no complicar inútilmente los cálculos, supondremos es una porcion de parábola, cuya ordenada en el vértice es $A'D'$, velocidad máxima de la vertical AB, y la ordenada en el fondo es la velocidad BK que se supone conocida (*). Para arreglarnos en lo posible á los resultados de las experiencias de Raucourt distinguiremos en este volúmen dos partes: la superior $CC'D'D$, cuyas secciones verticales son rectangulares $AA'D'R$, y las horizontales elipses HNG, y la inferior $C'L'LD'$, cuyas secciones verticales son porciones de parábola $D'G'K$ y las secciones horizontales son semielipses $H'N'G'$. Llamemos

v' la velocidad máxima $A'D'$, ó la de la molécula A', situada en medio de la seccion, la cual se supone igual á la AR de la molécula A de la superficie;

v'' la velocidad BK del extremo inferior B de la misma vertical;

x,y las coordenadas Ap, pm ó $A'p'$, $p'm'$ de una molécula m ó m', contadas para la parte superior desde el punto medio A de la anchura, y para

(*) Coriolis, á quien he imitado en las investigaciones que siguen, supone semielípticas estas secciones verticales, y esta hipótesis, poco conforme á las experiencias de Raucourt, referidas en el núm. 102, le conduce á un coeficiente del primer término de la ecuacion del número 126, que él mismo sospecha ser demasiado grande. El 1,26 á que se llega en el núm. 122 se acerca mas al adoptado por este ingeniero. Véanse los *Annales des Ponts et des Chaussées*, núm. 168, pág. 314 y siguientes. Año de 1836.

la parte inferior desde el punto A' medio de la altura AB;

V la velocidad variable de este punto m ó m';

$2a$ la anchura del fondo $L'L$;

h la altura AB de la seccion fluida;

n el talud de los lados, ó la relacion de la base LS con la altura DS;

Q el caudal de la corriente ó el volúmen de agua que gasta por segundo;

ω la área de la seccion trasversal CL;

v, la velocidad media de la corriente, que segun su definicion es $\frac{Q}{\omega}$;

v' la velocidad en la superficie de la vertical pE, cuya abscisa es x;

v'' la velocidad del punto próximo á E, ó la del fondo de la misma;

w la velocidad media de la misma vertical.

105. Considerando primeramente la parte superior, la velocidad de la molécula m es la ordenada MN de una elipse, cuyos semiejes son FH y AG, ó

$$AH=a+nh-ny,$$
$$AG=v'$$

y su valor general será

$$V=v'\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{(a+nh-ny)^2}\right)};$$

el gasto de agua de la molécula m cuya seccion es $dydx$ será

$$Vdydx;$$

y el de la porcion superior CD' de la seccion,

$$\iint Vdydx$$

ó $$2v'\int_0^{\frac{1}{2}h} dy \int_0^{a+nh-ny} dx\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{(a+nh-ny)^2}\right)};$$

efectuando la integracion del radical con respecto á x (*) (S. Pedro, calc. núm. 153, ecuacion 145 y siguientes) se convierte este gasto en

$$2v'\int_0^{\frac{1}{2}h} dy \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a+nh-ny}{2},$$

que se reduce á

$$\frac{\pi}{16}v'h(4a+3nh);$$

(*) Se podrá hallar directamente esta integral como sigue:

Si para abreviar se escribe c en vez de $a+nh-ny$, y se multiplica y divide por sí mismo el radical, se tiene

$$\int dx\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)}}-\int\frac{\frac{x^2}{c^2}dx}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)}}:$$

la integracion por partes da ademas

$$\int dx\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)}=x\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)}+\int x\frac{\frac{x}{c^2}dx}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)}}.$$

Sumando estas dos ecuaciones, y dividiendo por 2, se halla

$$\int dx\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)}=\frac{x}{2}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)}+\frac{c}{2}\int\frac{\frac{dx}{c}}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)}},$$

ó

$$\int dx\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)}=\frac{x}{2}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)}+\tfrac{1}{2}c.\text{arco}\left(\text{sen.}=\frac{x}{c}\right),$$

que entre los límites o y c se reduce á

$$\frac{c}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

como en el texto.

siendo π la semicircunferencia cuyo radio es 1.

Tratando análogamente la parte inferior se ve que la velocidad de la molécula m' es la ordenada MN' de una elipse $G'N'H'$ en que el semieje $F'H'$ tiene por valor

$$F'H' = a + \tfrac{1}{2}nh - ny;$$

el otro semieje AG' es la ordenada $F'G'$ de una parábola $D'G'K$, cuyo vértice está en D' á una distancia $A'D' = v'$, y que atraviesa el fondo por el punto K distante de la seccion la cantidad $BK = v''$; el valor de esta ordenada, ó del semieje AG', es

$$F'G' = v'\left(1 - \frac{4y^2(v' - v'')}{h^2v'}\right);$$

se tendrá por consiguiente para la ordenada MN'

$$V = v'\left(1 - \frac{4(v'-v'')y^2}{h^2v'}\right)\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{(a+\frac{1}{2}nh-ny)^2}\right)},$$

y para el gasto de la parte inferior $C'L$

$$2v'\int_0^{\frac{h}{2}} dy\left(1 - \frac{4(v'-v'')y^2}{h^2v'}\right)\int_0^{a+\frac{1}{2}nh-ny} dx\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{(a+\frac{1}{2}nh-ny)^2}\right)}$$

que se trasforma en

$$\frac{\pi}{2}v'\int_0^{\frac{h}{2}} dy\left(1 - \frac{4(v'-v'')y^2}{h^2v'}\right)(a+\tfrac{1}{2}nh-ny)$$

y se reduce á

$$\frac{\pi}{96}v'h\left(24a+6nh - \frac{v'-v''}{v'}(8a+7nh)\right).$$

Si se suman los dos gastos, se tiene para el caudal de la corriente

$$Q = \frac{\pi}{96}v'h\left(48a+24nh - \frac{v'-v''}{v'}(8a+7nh)\right).$$

106. Dividiéndole por la área ω de la seccion CL, la velocidad media de la seccion será

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{\pi v'}{96} \cdot \frac{48a + 24nh - \frac{v'-v''}{v'}(8a+7nh)}{2a+nh}.$$

107. Supongamos para abreviar estas expresiones que $v'' = 0{,}6v'$ (en cuya relacion concuerdan las experiencias de Raucourt con los resultados de Dubuat, segun los números 99 y 101); entonces las ecuaciones anteriores vienen á ser

$$Q = \frac{\pi}{240}v'h(112a+53nh),$$

$$v = v'\frac{\pi}{240} \cdot \frac{112a+53nh}{2a+nh};$$

ó sustituyendo por π su valor 3,1416

$$Q = v'h(1{,}45a+0{,}68nh);$$

$$v = v'\left(0{,}7235 + \frac{0{,}28nh}{2a+nh}\right);$$

el último valor, atendida la pequeñez del segundo término, dependiente de la base nh del talud, se reduce á

$$v = 0{,}7235v'.$$

Esta expresion de la velocidad media, deducida de experiencias hechas mas en grande que las de Dubuat, merece la preferencia sobre la dada en el núm. 99, singularmente en los rios considerables; pero atendiendo á que la velocidad en la superficie de la molécula media es algo menor que la velocidad máxima, se podrá aumentar un poco el coeficiente de v' y establecer la fórmula

$$v = 0{,}73v';$$

representando aqui v' la velocidad del filete medio en la superficie ó del *hilo de la corriente.*

108. Si conforme á las mismas leyes se quiere la velocidad media de las moléculas correspondientes á una misma vertical en funcion de las velocidades de sus extremos superior é inferior, observaremos que la velocidad de la molécula m es la misma que la del punto p: que el volúmen gastado por esta molécula es $w'dxdy$, y el gastado por la porcion pp' de la vertical es $\frac{1}{2}\, w'hdx$.

La velocidad de la molécula m' es la ordenada de una parábola cuyas ordenadas en el vértice y en el fondo son respectivamente las velocidades w', w'' de los puntos p', E. Esta velocidad es pues

$$w'\left(1-\frac{4(w'-w'')y^2}{h^2w'}\right),$$

y el volúmen gastado por la porcion $p'E$ de la vertical,

$$w'dx\int_0^{\frac{h}{2}}\left(1-\frac{4(w'-w'')y^2}{h^2w'}\right)dy,$$

ó

$$w'\,dx\,.\,\frac{h}{2}\,.\,\frac{2w'-w''}{3w'}.$$

Dividiendo la suma de los dos gastos por la seccion hdx de las moléculas verticales, la velocidad media de la vertical será

$$w=w'\left(\frac{1}{2}+\frac{2w'-w''}{3w'}\right);$$

ó suponiendo como antes $w''=0{,}6w'$,

$$w=0{,}96w':$$

esta relacion 0,96 de la velocidad media con la velocidad de la superficie en la misma vertical difiere muy poco de las referidas en el núm. 100. Para las aplicaciones convendrá adoptar por coeficiente el medio aritmético entre el anterior y los dos que se deducen de las dos séries de experiencias hechas por Brunings y Jimenez. La velocidad media de una vertical será pues

$$w=0{,}94w'.$$

109. Para poder sacar utilidad de las fórmulas anteriores, y tambien para hacer experiencias directas con el objeto de averiguar la velocidad media de una corriente, procederemos á indicar cómo se miden las velocidades de sus diferentes moléculas.

110. Para las de la superficie el medio mas sencillo y tal vez el mas seguro consiste en echar en el rio un pedazo de madera, cuya pesantez específica sea muy poco menor que la del agua, y en contar el número de segundos que tarda en correr una distancia anteriormente medida. Cuando se quiere mas exactitud se usan bolas huecas de hoja de lata ó cobre que se lastran con perdigones hasta que se sumerjan casi del todo en el agua. Se fijan ó con cuerdas que atraviesan de una orilla á otra, ó con visuales perpendiculares á la corriente, las dos líneas entre las cuales se ha medido la distancia que ha de correr el nadador ó bola. Se echa este nadador mas arriba de la primera línea á fin de que cuando llegue á ella y empiecen á contarse los segundos, haya adquirido la velocidad misma del fluido. Haciendo esta operacion dos ó tres veces en el hilo del agua ó en el paraje de mayor corriente, que siempre corresponde á la mayor profundidad, se tendrá con bastante exactitud la velocidad de este filete. No puede esperarse tanta cuando se aplica á los otros filetes mas próximos á las orillas, porque no suele mantenerse el nadador en la direccion paralela á estas orillas, como seria necesario para la debida aproximacion.

111. Una rueda de alas muy ligera y muy móvil sobre un eje horizontal que se ponga sobre la corriente de suerte que una ala quede sumergida, puede servir tambien para medir la velocidad de un punto cualquiera de la superficie. El centro de percusion sobre las alas adquirirá una velocidad muy próximamente igual á la del filete fluido. La rueda de que usó Dubuat, y le probó muy bien, era de pino, de unas 32 pulgadas de diámetro; constaba de 8 alas cuadradas de 3^{p},44 de lado: el árbol giraba sobre dos muñoncillos de hierro sujetos con chapas de cobre. Todo el instrumento no pesaba mas que libra y media.

112. Sin detenernos en describir el péndulo hidrométrico, el tubo de Pitot, el tachómetro de Brunings ni otros instrumentos imperfectos y ya en desuso, pasemos á dar razon del molinete de Wolmann de que se valen frecuentemente en Alemania para medir la velocidad de un filete fluido, sea cualquiera su profundidad. Consta este molinete de un árbol giratorio horizontal, fig. 24, á cuyo extremo estan dispuestas cuatro alas como las de un molino de viento. La corriente les hace dar vueltas, y del número de revoluciones hechas en un tiempo dado, número que es indicado por el mismo instrumento, se deduce directamente la velocidad de dicha corriente en el punto medio, que es el correspondiente al eje. Prescindiendo de la pequeña resistencia producida por el rozamiento del árbol sobre sus apoyos, la velocidad de la corriente es con efecto proporcional á la de las alas, y esta lo es al número de vueltas que dan en la unidad de tiempo. Sea n el número de estas vueltas por segundo, ó lo que es lo mismo, el número de revoluciones que dan las alas en cierto número de segundos dividido por este número de segundos, y φ un coeficiente que será constante para un mismo molinete, y se determinará por prévia experiencia;

la velocidad v del filete fluido será expresada por la fórmula

$$v=\varphi n.$$

El valor del coeficiente φ que conviene al molinete, se determinará sometiendo el instrumento á una corriente de agua cuya velocidad sea de antemano conocida, y observando el número de vueltas que da en un tiempo dado: se calculará n ó el número de vueltas por segundo: dividiendo despues la velocidad v por n se tendrá dicho coeficiente.

La escala de la primera figura que representa este molinete, es la mitad del tamaño natural. Las cuatro aletas son delgadas chapas cuadradas de cobre de una pulgada de lado: su medio dista dos pulgadas del eje de rotacion: su plano forma con este eje un ángulo de 45°. Para las velocidades pequeñas que exigen un instrumento mas sensible se duplica el lado del cuadrado de las alas y su distancia al eje para tener asi dos juegos de alas, y aplicar al árbol el que se juzgue mas adecuado. Las ruedas dentadas tienen 50 dientes cada una, y 5 el piñon que trasmite el movimiento de la primera á la segunda. Ambas estan puestas en un bastidor móvil al rededor de uno de sus extremos, que se mantiene separado del árbol por medio de un muelle espiral. El árbol está guarnecido de una hélice para formar una rosca sin fin, en cuyos pasos engranan los dientes de la primera rueda cuando se aproxima al bastidor tirando hácia arriba de un cordon atado á su extremo móvil. Por el número de dientes de las ruedas y piñon se colige que una vuelta de la primera rueda corresponde á 50 del árbol, y á $\frac{1}{10}$ de vuelta de la segunda, pudiendo asi señalar el instrumento hasta 500 vueltas de las alas.

113. Para hacer uso de este molinete se empieza por poner muy corriente el juego de las partes giratorias á fin de

que haya el menor rozamiento posible: se coloca el cero del número de los dientes de ambas ruedas en frente de los índices respectivos fijados al bastidor: se introduce despues una asta de madera, ó mejor una vara de hierro por el cubo ó extremo horadado del molinete, y este se asegura en el punto de ella correspondiente á la profundidad del filete fluido cuya velocidad se quiere medir. Si esta profundidad es pequeña, se coloca y afirma el asta á algunos pies mas adelante de una barquilla que se amarra en el paraje donde se ha de operar. Cuando es mucha la profundidad, sobre dos barcas pareadas se echan de una á otra tablones gruesos que sirven de puente: se llevan asi al sitio en que se ha de medir la velocidad: se baja despues el asta con el molinete hasta que su extremo toque al suelo. Todo asi dispuesto, á una señal dada por el que observa el reloj, tira otro del cordon del bastidor que lleva las ruedas dentadas, y engranándose asi con el árbol giratorio dan vueltas con él. A otra señal se afloja el cordon: el resorte espiral obliga á las ruedas á separarse, y por consiguiente á detenerse en su movimiento. Se saca el instrumento del agua; se lee en los índices el número de vueltas dadas por el árbol en el tiempo trascurrido desde la primera á la segunda señal: dividido este número por este tiempo y multiplicado por el coeficiente propio del molinete, se tendrá la velocidad buscada.

Haciendo esta operacion en diversos filetes de una misma vertical dD, fig. 22, de pie en pie por ejemplo, y dividiendo la suma de las velocidades halladas por el número de ellas, el cociente representará la velocidad media del agua en la vertical correspondiente. Si se repite el mismo procedimiento con diversas verticales aA, bB &c. bastante próximas, la media aritmética entre cada dos velocidades medias consecutivas representará próximamente la velocidad

media correspondiente á cada intervalo. Multiplicando cada velocidad media por la área $aABb$ de la porcion respectiva y sumando los productos, se tendrá el volúmen de agua que lleva el rio por cada segundo. Dividiendo por último este volúmen por la área de toda la seccion, el cociente será la velocidad media de la corriente.

114. Este medio de resolver el problema, bien que el mas perfecto de los conocidos hasta ahora, es largo, complicado, costoso, y exige sumo cuidado y precision de parte del ingeniero. Si se supiera con exactitud la relacion que existe entre la velocidad en la superficie y la velocidad media para una misma vertical, bastaria observar con el nadador la velocidad de diversos puntos a, b &c., fig. 22, de la superficie fluida, deducir de aqui la velocidad media en cada una de las verticales, y continuar despues el cálculo segun se ha dicho en el número anterior. Pero mientras mayor número de experiencias no fijen completamente esta relacion, es fuerza atenerse á la fórmula $w=0,94.w'$ que no puede aun estimarse suficientemente aproximada. Si es el nadador el instrumento con que se mide la velocidad, debe observarse que aun cuando se procura siempre elegir una porcion del rio recta y de orillas paralelas, el nadador no suele marchar paralelamente á las orillas, sino que en los diferentes puntos a, b &c., fig. 25, sigue direcciones tales como aa', bb' &c.: se deberá, pues, tomar por anchura media entre los planos verticales aa', bb' la mitad de los intervalos ab, $a'b'$, y por altura media de la porcion de rio $abb'a$ la cuarta parte de la suma de las cotas aA, bB, $a'A'$, $b'B'$ en a, b, a', b' que haya dado la sonda. El producto de la anchura media por la altura media será la seccion media: multiplicada esta por la mitad de la suma de las velocidades medias deducidas para las verticales a, b se tendrá el caudal de la

porcion de corriente $aba'b'$: para las porciones extremas $nad'n'$ en que la velocidad en las orillas es nula ó casi nula, se tomarán por factor de la seccion los $\frac{2}{3}$ de la velocidad media en a, que será próximamente la del filete situado en el centro de gravedad de dicha seccion triangular. La suma de todos los volúmenes asi calculados (ó el caudal del rio) dividida por la suma de las secciones medias dará la velocidad media buscada.

Para proceder con órden en esta operacion se empezará por tender una cuerda dividida en pies de una orilla á otra en cada una de las secciones nm, $n'm'$, cuya distancia no deberá bajar de 200 pies. Se construirá con exactitud cada seccion sondando de trecho en trecho en la direccion de las cuerdas por medio de una asta si es poca la profundidad, ó de una cuerda dividida y un plomo si es mucha. Una persona en su barquilla echa el nadador á 15 ó 20 pies mas arriba de la primera cuerda nm, y anota el número de los pies de esta por debajo del cual pasa: otra desde la orilla anota el instante en que pasa por debajo de ella y de la segunda para contar el tiempo trascurrido; y otra tercera en su barca observa como la primera el punto de la segunda cuerda $n'm'$ por donde atraviesa el nadador y le recoge. Construidos con exactitud los perfiles de las secciones de la corriente en los planos verticales de las dos cuerdas, ó al menos medidas en ambas secciones las sondas de los puntos de partida y de llegada del nadador, se tienen los datos necesarios para resolver como en el número anterior el problema de que se trata.

115. La incertidumbre que aun se tiene sobre el valor de la velocidad media de una vertical deducido como lo acabamos de hacer del que se mide en su extremo superior hace desconfiar de la exactitud del resultado final. Pero se

puede excusar esta valuacion adoptando un instrumento que aunque no con absoluta exactitud, da directamente esta velocidad, y ha sido empleado algunas veces con buen éxito. Consiste este instrumento, fig. 26, en un palo ó asta cilíndrica de madera seca ligera, de dos pulgadas de diámetro y de una longitud poco menor que la profundidad del agua, que se lastra en su extremo inferior para que se mantenga vertical durante su movimiento, y se barniza para que no embeba el agua. La velocidad de esta asta será con muy corta diferencia igual á la velocidad media de todos los filetes fluidos que la rodean ó á la velocidad media de su vertical. Conviene en la práctica tener varios trozos de asta fáciles de unir y desunir por sus extremos á fin de componer con ellos la longitud correspondiente á la profundidad del agua en los diversos puntos en donde se ha de operar. Basta para esto terminar cada trozo en un extremo por un tubo cilíndrico de hoja de lata CE y poner cerca del otro una abrazadera de hierro ab en donde se enganche el garfio r. El trozo inferior MN del asta es un canuto de hoja de lata capaz de recibir diferentes pesos de plomo s, s', s'' del mismo calibre que se le aplican segun su diferente longitud, de suerte que se sumerja hasta cerca del fondo, y no queden fuera del agua mas que 9 ó 12 pulgadas: el resto del canuto se llena con un tarugo de madera. El trozo superior AB que sale fuera del agua lleva una anclilla t de cuatro garfios con el objeto de que al llegar el asta á la cuerda inferior despues de corrido el intervalo de las dos, segun se dijo del nadador en el núm. 114, se enganche en ella para recogerla con comodidad, y leer el número de pies de la cuerda en el punto en que se detiene.

Por lo demas el procedimiento que debe seguirse para llegar á obtener con este instrumento la velocidad media

de un rio es el mismo especificado en el número anterior. Pero conviene ademas recorrer con una barca el intervalo de las secciones en el sentido de la corriente y en diversos puntos de su anchura para reconocer prolijamente su profundidad y poder dar en cada uno al asta la mayor longitud posible sin que tropiece en el camino. La cuerda que se tienda en la seccion superior debe estar bastante alta para que no se enganche el asta al atravesarla, y por contraria razon la cuerda inferior se tenderá lo mas cerca posible de la superficie del agua. Por último, la persona encargada de echar al agua las astas debe sumergirlas poco á poco dándoles alguna inclinacion aguas arriba, á fin de que lleguen verticales á la primera seccion, ya que no pueda evitarse que se inclinen hácia adelante en su tránsito hasta la segunda.

CAPITULO II.

DE LA MEDIDA DEL CAUDAL DE LAS CORRIENTES.

116. Si nos hemos detenido tanto en describir los procedimientos principales que se usan para obtener la velocidad media de una corriente, es no solamente por ser un dato principal en todas las cuestiones que se ofrecen en los rios, sino tambien porque el conocimiento de esta velocidad conduce inmediatamente al del volúmen de agua que lleva en cada segundo, y la resolucion de este problema ocurre muy frecuentemente, ya se trate de averiguar la cantidad de agua que pueda dar el rio para la navegacion, para las máquinas, para el riego, ó ya de distribuirla convenientemente en los diversos usos á que se aplica.

Segun la definicion dada en el núm. 98, multiplicando la seccion trasversal de una corriente por su velocidad media se tendrá el caudal de esta corriente en aquel paraje. La aplicacion de esta regla tendrá lugar cuando se conozca préviamente la velocidad media, ó cuando se deduzca de la que se mide en el hilo del agua. Pero siguiendo cualquiera de los otros procedimientos indicados en los números 112 hasta 115 se llega á obtener el valor del caudal antes que el de la velocidad media, como se habrá notado.

117. Si se trata de un manantial cuya agua puede recogerse toda en una vasija ó depósito de capacidad conocida, se tendrá inmediatamente su caudal dividiendo el volúmen obtenido por el número de segundos que haya tardado en llenarse.

Para los arroyos y manantiales el medio mas cómodo y seguro de medir su caudal consiste en detener el agua con un dique de tablas puesto de una márgen á otra, abriendo en la parte superior un vertedor rectangular por donde salga el agua. Cuando el nivel superior se mantenga constante, se mide su altura sobre el umbral y se valúa el gasto por la fórmula

$$Q=\frac{2}{3}mah'\sqrt{2gh'}$$

del núm. 60, ó por las de los números 62 y siguientes segun las circunstancias.

Para que la operacion salga bien, conviene arreglar las dimensiones del vertedor de suerte que no baje de 5 pulgadas la altura h' del agua sobre el umbral; la altura de este sobre el fondo del arroyo deberá ser un poco mayor que la profundidad natural del mismo arroyo, no sea que refluya el agua hácia el vertedor despues de su salida.

Este procedimiento es poco costoso y está siempre al alcance del ingeniero. Se elige para mayor comodidad el paraje en que las orillas esten mas escarpadas: se construye el tabique de tablas: se prepara el fondo y las márgenes

para recibirle: se coloca: se tapan las juntas con moho, estopa ó sebo: se ataja el agua que se escapa por el fondo ó por las márgenes con céspedes, arcilla ó tierra, hasta conseguir que permanezca constante la superficie superior del fluido el tiempo necesario para medir con exactitud su altura sobre el umbral. Si se dejan intervalos que no bajen de 1 pie entre los lados del vertedor y las márgenes, se tomará muy fácilmente esta medida por el medio indicado en el núm. 63.

118. El marco que para el aforo de las aguas usan los fontaneros de Madrid es una caja prismática AB, fig. 27, sin tapa, dividida en dos partes por una lengüeta mn agujereada cerca del fondo, puesta con el objeto de amortiguar la velocidad del agua. Esta entra en la parte M, y por debajo de la lengüeta pasa á la otra N. En la pared opuesta AA' estan abiertos orificios circulares, tangentes todos á una misma horizontal hh', guarnecidos de caños cilíndricos de su mismo calibre y de $2\frac{1}{4}$ pulgadas de largo con tapas que se enroscan en su boca exterior. Se van quitando sucesivamente estas tapas hasta que el nivel del agua se mantenga constantemente en la tangente $h\,h'$, y entonces por el número y la magnitud de los caños abiertos se señala el número de *reales de agua* de que consta el manantial. La figura 27 construida á la escala de $\frac{1}{10}$ indica uno de estos marcos que es de los menores que existen en la villa. En la línea OD se señalan en su tamaño natural los diámetros de los orificios correspondientes á los diversos gastos desde $\frac{1}{8}$ de real hasta 8 rs., y la misma línea OD es la longitud que tienen todos los caños.

En este marco se notan los siguientes defectos:

La proximidad de unos orificios á otros hace que no sea el mismo el gasto de cada uno, segun que esté ó no tapado el inmediato, conforme á la observacion del núm. 48.

La inmediacion de la pared AD al último orificio de 8 reales disminuye la contraccion por este lado, y el gasto de este orificio debe ser mayor que el del inmediato del mismo tamaño, segun se dijo en el núm. 51.

La diversidad de relaciones entre la longitud y diámetros de los caños hace incierto el cálculo de los respectivos gastos; y solo por experiencias inmediata y repetidamente hechas para cada marco, se puede asignar con exactitud el gasto de cada orificio cuando esten abiertos y cuando esten cerrados los inmediatamente próximos.

En cuanto al valor del *real de agua* no es posible deducirle con la debida precision por causa de no saberse cuál de estos caños es el que le da, y de las considerables diferencias entre los productos de todos ellos. Puede esto notarse en la tabla siguiente, calculada por la fórmula $Q = m\omega\sqrt{2gh}$, tomando para m coeficientes deducidos por interpolacion de los que estan escritos en la segunda columna del núm. 77.

Designacion de los caños. *Reales.*	Diámetro de los orificios. *Pulgadas.*	Relacion de la longitud con el diámetro.	Valor del coeficiente del gasto, segun el núm. 77.	Gasto por segundo. *Pulg. cúbicas.*	Gasto correspondiente á 1 real. *Pulg. cúbicas.*
8	1^p,680	1,64	0,68	40,136	5,017
4	1,152	2,39	0,81	18,615	4,654
2	0,768	3,58	0,82	6,838	3,419
1	0,588	4,68	0,80	3,422	3,422
$\frac{1}{2}$	0,444	6,19	0,79	1,674	3,348
$\frac{1}{4}$	0,276	9,96	0,78	0,5036	2,014
$\frac{1}{8}$	0,204	13,14	0,77	0,2335	1,868
				Valor medio.....	3,39

Promedio de los $31\frac{1}{8}$ rs. que produce el marco 4^{ppp},528.

Por los años de 1727, segun Polanco, el real de agua era la cantidad que sale por un orificio circular de 7 líneas de diámetro, bajo una carga constante de 1 dedo contado hasta el borde superior, añadiendo que su producto era de $9^{ppp},266$ por segundo: este gasto es exagerado. Aplicando la fórmula del núm. 46 en que $m=0,689$, $r=-\frac{7}{24}^{p}$, $h=\frac{25}{24}^{p}$ resulta $Q=5^{ppp},46$ para el valor del real.

Usando de la fórmula del núm. 57 en que $m=0,692$, y $n=\frac{r}{h}=\frac{7}{25}=0,28$, se saca $Q=5,484-0,013=5^{ppp},47$ casi como antes.

Segun el mismo Polanco los gastos de los orificios correspondientes á 2 rs., $\frac{1}{2}$ real y $\frac{1}{4}$ de real no tienen con el gasto de un real la relacion expresada por su mismo nombre; absurdo que repugna al sentido comun.

D. José Mariano Vallejo midió directamente el real de agua por el marco del Buen-Retiro, segun expresa en el Mercurio de Octubre de 1824, y halló que equivalia á $5^{ppp},36$ por segundo.

Barra, en su Memoria sobre la conduccion de aguas á Madrid, indica como resultado de varias experiencias que su valor es de $2^{ppp},98$ por segundo, ó de 149^{PPP} por dia. El diámetro del orificio es segun él de $6\frac{1}{2}$ líneas.

Esta diversidad de valuaciones puede ser causa de graves perjuicios en la ejecucion de los contratos existentes sobre la concesion y distribucion de las aguas. La actual legislacion, cuyo lenguaje se resiente del atraso de la ciencia en la época en que fue establecida, ó tal vez de la falta de conocimientos especiales en los que la redactaron, debe modificarse, señalando como *única medida* de las aguas *el volúmen que producen en un tiempo dado*, y entonces la designacion de un nombre, por ejemplo, *el real de agua*, no solo no trae inconveniente, sino que es cómoda para el uso comun con tal que se establezca por ley el volúmen á que equivale en la unidad de tiempo.

Sin pretension alguna á que se adopte generalmente, siempre que en el discurso de este escrito se mencione el real de agua se entenderá que es el producto de tres pulgadas cúbicas por segundo, valuacion que en números justos de pulgadas difiere muy poco de la indicada por Barra.

Asi el real equivaldrá á

3^{ppp} por segundo:
180^{ppp} ó 4,466 cuartillos por minuto:
$6^{PPP},25$ ó 68 azumbres por hora:
150^{PPP} ó 201 cántaras por dia.

Al real le dividen en Madrid por mitades sucesivas en medios reales, cuartillos y medios cuartillos.

Para construir un marco que con la debida aproximacion diese la medida de las de un manantial, deberia hacerse muy delgada la pared en que se abriesen los agujeros, y evitar asi la incertidumbre que ocasiona la diversidad de relacion entre su grueso y los diámetros de aquellos: no ponerles caños por la misma razon: hacer que la altura constante del agua sobre el borde superior excediese del triple de su diámetro, con el objeto de que pudiese aplicarse con exactitud la fórmula del núm. 44 sin dar lugar á la incertidumbre que procede de la posicion del punto dotado de la velocidad media, y de la depresion del fluido por encima de los orificios: poner estos bastante distantes entre sí y de las paredes laterales para que no fuese alterada la contraccion del fluido. Con estas condiciones los diámetros de los orificios y la altura del nivel del agua sobre su centro ó sobre su borde superior para que produzcan cantidades da-

das de agua, pueden arreglarse fácilmente por la fórmula del núm. 44 y tabla del núm. 46.

Pero como las mas veces no podria disponerse de un desnivel considerable, es forzoso emplear marcos en que la carga de agua sea muy poco mayor que el radio del orificio. Cumpliéndose las otras circunstancias, se hará uso de las fórmulas de los números 56 ó 57, y tambien, aunque con menos exactitud, de la fórmula del núm. 44 y tabla del núm. 59.

Siguiendo este último camino, hé aqui los diámetros correspondientes á un marco semejante al de Madrid, suponiendo señalada la línea del nivel con la condicion de que el diámetro del real ó de 3^{ppp} por segundo sea de 6 líneas justas.

Gasto por segundo.	24^{ppp} *ú 8 reales.*	12^{ppp} *ó 4 reales.*	6^{ppp} *ó 2 reales.*	3^{ppp} *ó 1 real.*	$1\frac{1}{2}^{ppp}$ *ó* $\frac{1}{2}$ *real.*	$\frac{3}{4}^{ppp}$ *ó* $\frac{1}{4}$ *real.*	$\frac{3}{8}^{ppp}$ *ó* $\frac{1}{8}$ *real.*
Diámetro en pulg.	1,164	0,846	0,624	0,5	0,309	0,219	0,155
En líneas.	13,97	10,15	7,49	6	3,71	2,63	1,86
Coefic. *m*.	0,70	0,71	0,72	0,74	0,77	0,79	0,80

La línea horizontal con quien debe coincidir la superficie del agua se ha de trazar á $0^p,648$ ó $7\frac{7}{9}$ líneas sobre el borde superior de todos los orificios. El cálculo para esta altura se hizo como en el ejemplo del núm. 59: el de los diámetros segun el del núm. 57.

Cuando se tienen abiertos en una tabla delgada muchos círculos iguales correspondientes á cierto caudal de agua bajo una altura dada, la misma puede servir para medir un

caudal de agua mayor con solo hacer que el nivel se levante mas sobre su borde superior.

Se quiere, por ejemplo, que por el orificio de los 8 reales salgan 12 rs. de agua, y se trata de saber á qué altura se ha de trazar la horizontal con quien debe coincidir el nivel del agua para que esto resulte. El problema se resuelve como en el núm. 59. Siendo $r=0,582$, el valor $\frac{Q^2}{\omega^2.2g}=1,3561$; haciendo el cálculo de la fórmula

$$h=\frac{Q^2}{m^2\omega^2.2g}$$

y viendo desde luego que h difiere poco de 3 pulgadas, ó que la altura sobre el borde superior es de poco menos de $2\frac{1}{2}$ pulgadas, se hará $m=0,66$, que es el que corresponde á esta altura y á la dimension vertical del orificio: el valor de h es entonces $h=3^p,113$, y la altura sobre el borde superior $3,113-0,582$ ó $2^p,531$ para que salgan por el orificio los 12 rs. ó 36^{ppp} de agua por segundo.

Una tabla asi dispuesta para medir las aguas de una corriente puede sustituir al vertedor de que se habló en el número anterior, con la ventaja de excusar todo cálculo.

119. La unidad de medida de los franceses es la *pulgada de fontanero* ya mencionada en el núm. 58, que produce 560 pies cúbicos franceses en 24 horas, ó 17,7465 pulgadas cúbicas españolas por segundo. La dividian en 144 partes que llamaban *líneas de agua*.

Prony ha propuesto se sustituya á esta unidad otra poco diferente en magnitud á quien da el nombre de *módulo*. Su producto es de 20 metros cúbicos en 24 horas, ó de $18^{ppp},4907$ por segundo, y equivale á 6,16 reales.

La unidad de que se sirven en Valencia para las aguas de sus riegos es *la fila ó muela de agua*, cuya medida exacta

no está definitivamente determinada. Todos convienen (*) en que es el agua que pasa por una boca de un palmo cuadrado valenciano, ó de $87^{pp},74$; pero no estan de acuerdo sobre su velocidad para que produzca la fila. Segun unos ha de ser de 4 palmos ó 39 pulgadas por segundo; segun otros, y entre ellos el arquitecto Cervera, de 6 palmos ó $58^{p},50$ por segundo; otros quieren que solo sea de $1\frac{1}{3}$ palmos ó 13 pulgadas por segundo, y segun estos datos la valúa Mr. Hachette (**). Adoptando la determinacion de Cervera, que parece ser la que mas aceptacion goza, resulta

1 fila$=5561^{ppp}$ por segundo, ó 1854 reales.

La fila se divide en 20 tejas y tambien en 144 plumas.

La *hila real de Lorca* (***), que en el campo de esta ciudad sirve de medida, es el $\frac{1}{24}$ del caudal de aquel rio, lleve poca ó mucha agua. Segun ley, debe pasar por una boca de $40\frac{1}{2}$ pulgadas cuadradas, y se computa su velocidad en 30^{p} por segundo. La hila equivale entonces á 1215^{ppp} por segundo, ó á 405 reales. Su producto en 24 horas, que lleva el nombre de *casa*, se divide en 19 partes de á $\frac{5}{4}$ de hora de duracion, á quienes llaman *cuartos*, contándose el $\frac{1}{4}$ de hora sobrante como desperdiciado por la maniobra para la distribucion entre los partícipes. Tambien la casa se divide en dos partes, todo el año desiguales, menos en los equinoccios; la primera desde salir al ponerse el sol, llamada *día*, y la segunda desde que se pone hasta que sale, llamada *noche*. Estas aguas se venden por solo el tiempo de 24 horas á lo mas. El que compra, por ejemplo, 4 casas y 2 dias, adquiere el derecho á usar de dia 6 hilas y de noche 4 hilas de agua en el dia señalado, y así de los demas: haciendo la cuenta para el 4 de Agosto, cuyo dia es de 13^{h} $58'$, y suponiendo á la hila el valor prefijado, la cantidad de agua que toma viene á ser de $313713^{ppp},25$, y con ella puede regar una área de 1254849^{pp}, cerca de 35 fanegas de aquel pais, dando 3 pulgadas de altura de agua (*).

(*) Distribucion de las aguas del Turia por D. Francisco Borrull. Valencia, 1831; pág. 9.

(**) Voyage en Espagne par Mr. Jaubert de Passa; tomo I, página 178: tomo II, pág. 278. La fila se estima suficiente para el regadío de 400 hanegadas de huerta. Cada hanegada equivale á $10694^{pp},53$, ó á 0,129 fanegas de Castilla.

(***) Memoria de D. José Muso y Valiente, inserta en el tratado de las aguas de Vallejo; tomo III, pág. 492 y siguiente.

En Cataluña designan por *pluma de agua* (**) la que sale por un orificio circular de $0^{p},25$ de diámetro con una altura de tres pulgadas y dos líneas sobre su centro. Aplicando la fórmula del núm. 44, en que segun la tabla del núm. 46 es $m=0,67$ se halla

1 pluma$=1^{ppp},73$ por segundo, ó 0,58 reales.

Siendo de valor incierto todas estas medidas, usarán siempre los ingenieros de las unidades de volúmen en sus

(*) La altura de agua que se computa necesaria para un buen riego varía entre 2 y 5 pulgadas, segun la calidad de las tierras y lo poco ó mucho que hayan sido laboreadas para recibirle.

En cuanto al número de riegos que necesita cada especie de cosecha se estima por lo general:

3 para el trigo.
1 para la cebada.
5 para el maiz.
3 para el panizo negro.
5 para las habas y demas hortalizas.
4 anuales para los olivos.

Uno de estos riegos se da siempre en la época de la siembra.

(**) Apuntes del General D. José Cortines, Coronel del Cuerpo de ingenieros.

valuaciones, sin perjuicio de convertir sus resultados en aquellas para hacerse entender en el pais que deba aprovecharlos.

Para las fuentes ó manantiales de poco caudal la unidad será la pulgada cúbica por segundo que corresponde á 50 pies cúbicos en 24 horas.

Para los rios caudalosos ó grandes acequias será mas cómodo tomar el pie cúbico por segundo como unidad de su medida.

CAPITULO III.

ECUACION DEL MOVIMIENTO DE LAS CORRIENTES.

120. Puesto que sola la gravedad es la fuerza que impele á una corriente á lo largo del plano inclinado de su lecho, y que combinada esta fuerza con las resistencias de las paredes se origina el movimiento *variado* que en el número 35 se caracterizó con la circunstancia de *permanente*, no nos será dificil poner en ecuacion este movimiento por medio del principio ya empleado de la conservacion de las fuerzas vivas. Llamemos

s la longitud cualquiera de la línea descrita por el centro de gravedad de una tonga de agua perpendicular á dicha línea, hasta llegar á la posicion AB, fig. 28;

c el contorno de esta tonga que está en contacto con la superficie de las paredes, y se llama el *perímetro bañado;*

i la pendiente del fondo, ó la tangente del ángulo α que forma con la horizontal el perfil longitudinal que pasa por los puntos mas bajos B, B' de cada seccion. En vista de la pequeñez de este ángulo se podrá reputar i por su seno;

k la profundidad DG del centro de gravedad de la seccion AB, que en virtud de una observacion análoga á la anterior es igual á AG;

ω la área de la seccion AB perpendicular á la línea descrita por el centro de gravedad;

h la profundidad CB ó AB;

x, y las coordenadas Ap, pm de una molécula m;

V la velocidad de esta molécula;

v la velocidad media de la corriente cuando pasa por la seccion AB;

Q el gasto constante de la corriente en un segundo;

z la altura Aa de la superficie de la seccion, referida á un plano horizontal superior HH;

t el tiempo en segundos, contado desde un instante cualquiera;

Π el peso de la unidad de volúmen del fluido;

g el incremento de velocidad que en cada segundo imprime la gravedad á los cuerpos $=422^p$.

Designaremos por la característica Δ las variaciones que sobrevienen á todas estas cantidades, ó á funciones suyas al pasar de la seccion AB á la seccion $A'B'$, ó al correr el centro de gravedad la longitud $GG'=\Delta s$.

121. El principio arriba citado se enuncia en el caso actual diciendo: que la suma de las fuerzas vivas adquiridas por la masa fluida $ABB'A'$ en el instante dt, es igual al duplo de la suma de las cantidades de accion producidas: 1.° por la gravedad ó por el peso de las moléculas contenidas en dicho volúmen de agua; 2.° por las presiones que

tienen lugar sobre las secciones extremas AB, $A'B'$, tomando la última en sentido contrario de la primera; 3.° por las resistencias que produce la adherencia de las moléculas fluidas entre sí y con las paredes del lecho en la extension Δs. Establezcamos la expresion algebráica de cada uno de los términos de esta ecuacion.

122. Para determinar la fuerza viva que adquiere la masa fluida $ABB'A'$ en un tiempo dado, se la seguirá en su movimiento, y conforme se dijo en el núm. 35 se examinará donde se halla en el último instante, para restar la suma de las fuerzas vivas que tenia en el primero de la suma de las fuerzas vivas que tiene en el segundo. Pero es evidente que todo el volúmen comun á los dos espacios ocupados por la masa en el primero y en el último instante, puesto que según la propiedad del movimiento permanente tienen sus partículas la misma velocidad y la misma masa, gozará de fuerzas vivas que se destruirán al efectuar la sustraccion indicada; bastará por consiguiente tomar las partículas que han salido del espacio $ABB'A'$ ocupado primitivamente desde la seccion $A'B'$ hácia la derecha, formar la suma de sus fuerzas vivas y restar de esta la suma de las fuerzas vivas de las partículas que ocupaban la porcion de este mismo espacio abandonada por las partículas próximas á la seccion AB. En el caso actual el volúmen abandonado en el tiempo dt, contiguo á AB, es $dt\iint Vdydx$; su peso $\Pi\, dt\iint Vdydx$; su masa $\frac{\Pi dt}{g}\iint Vdydx$; y su fuerza viva $\frac{\Pi}{g}dt\iint V^3dydx$. De la misma manera, designando por V' la velocidad variable de un punto cualquiera de la seccion $A'B'$, y por x', y' sus coordenadas, se hallará para la fuerza

viva correspondiente á las partículas que han corrido desde esta seccion aguas-abajo $\frac{\Pi}{g}dt\iint V'^3dy'dx'$; de suerte que la fuerza viva adquirida en el tiempo dt por la masa de agua $ABB'A$, que es $\frac{\Pi}{g}dt\left(\iint V'^3dy'dx'-\iint V^3dydx\right)$ podrá designarse por $\frac{\Pi}{g}dt\,\Delta\iint V^3dydx$.

Para que sea útil esta expresion en las aplicaciones, conviene efectuar las integraciones indicadas y que no aparezca otra velocidad que la media. Pero por una parte el contorno de las corrientes no tiene las mas veces una forma geométrica definida, y seria sumamente engorrosa y pesada la operacion de dividir la seccion en partes geométricas para determinar los límites de las integrales; por otra, no se conoce con seguridad la forma de la funcion en v', x, y (núm. 104) de la velocidad variable V de una molécula. Mientras nuevas experiencias no conducen al establecimiento definitivo de esta funcion, adoptaremos la indicada en el núm. 105, y para mayor simplificacion, ya que los taludes del trapecio, que es la figura ordinaria del lecho de las corrientes, tienen muy poca influencia en el valor de la velocidad media, supondremos desde luego la seccion rectangular ó $n=0$: tambien supondremos $v''=\frac{3}{5}v'$.

El valor de la velocidad en la porcion de la seccion comprendida entre la superficie y el medio de la profundidad es

$$V=v'\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

y la integral

$$\int_0^{\frac{h}{2}}dy\int_0^{a}V^3dx$$

se reduce (S. Pedro, calc. núm. 153 y siguientes) á,

$$\frac{3\pi}{16}ahv'^3.$$

En la porcion inferior de la seccion se tiene

$$V=v'\left(1-\frac{8y^2}{5h^2}\right)\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)},$$

y la integral

$$\int_0^{\frac{h}{2}}dy\int_0^a dx\,V^3=\frac{3\pi}{16}\cdot\frac{601}{875}ahv'^3.$$

Sumando estas dos integrales, la total es

$$\frac{3\pi}{16}\cdot\frac{1476}{875}ahv'^3$$

ó

$$\frac{1107\,.\,\pi}{3500}ahv'^3.$$

Si se despeja v' en el valor de Q del núm. 107, que es

$$Q=\frac{7\pi}{15}ahv'$$

y se sustituye en la anterior integral, se convertirá en

$$\frac{1107\,.\,15^3.}{3500\,.\,343\,.\,\pi^2}\cdot\frac{Q^3}{a^2h^2}$$

ó por ser $Q=2ahv$ y $\frac{Q^2}{4a^2h^2}=v^2$

en

$$\frac{4\,.\,1107\,.\,15^3Q}{3500\,.\,343\,\pi^2}\cdot v^2$$

que se reduce próximamente á

$$1{,}26\,Qv^2.$$

El primer miembro de la ecuacion buscada es por consiguiente en valores de la velocidad media

$$\frac{1{,}26\,\pi\,Q\,dt}{g}\cdot\triangle v^2.$$

123. Pasemos á formar el primer término del segundo miembro, y con este objeto designemos por

P el peso de la masa fluida $ABB'A'$;

α_0 la distancia del centro de gravedad de esta masa al plano horizontal HH en el primer instante;

α la misma distancia medida en el último instante.

La cantidad de accion que tiene lugar en virtud del descenso vertical de la masa fluida será segun el núm. 36

$$P(\alpha-\alpha_0),$$

ó el producto del peso total por el descenso vertical de su centro de gravedad, ocurrido desde el primero al último instante.

Observaremos ahora como en el número anterior y en el 36, que existiendo una porcion del peso total, que es comun á la primera y última posicion de las moléculas que se consideran, si designamos este peso por P' y por ζ la ordenada de su centro de gravedad, y tenemos presente que las ordenadas del centro de gravedad del peso restante desocupado por la parte AB, y adelantado por la otra $A'B'$, son respectivamente $z+k$ y $z+\triangle z+k+\triangle k$, la expresion anterior se trasforma en virtud de la propiedad conocida del centro de gravedad en

$$P'\zeta+(P-P')\,(z+\triangle z+k+\triangle k)-P'\zeta-(P-P')\,(z+k)$$

ó en

$$(P-P')\,(\triangle z+\triangle k):$$

que segun se observó en el núm. 36 viene á ser la que produciria solo el peso $P-P'$ del volúmen desocupado en la parte superior ó adelantado en la parte inferior, descendiendo toda la altura comprendida entre los centros de gravedad de este volúmen en las dos posiciones. Siendo este volúmen Qdt, y su peso πQdt, el primer término buscado es $2\pi Q\,dt\,(\triangle z+\triangle k)$.

124. Puesto que en las aplicaciones es bastante lento el

movimiento para que la presion sobre un elemento $dydx$ de la seccion AB sea la misma que si el fluido estuviese en reposo, el valor de esta presion es $\pi ydydx$; y su cantidad de accion en el tiempo dt, ó mientras corre la molécula el espacio Vdt, $\pi Vdtydydx$. La cantidad de accion debida á la presion total será pues

$$\pi dt \iint y\, Vdydx.$$

Si se considera que el peso del volúmen abandonado en el tiempo dt es por una parte $\pi Q\,dt$, y por otra $\pi dt \iint Vdydx$; y tomamos su momento con relacion á la horizontal que pasa por el punto A para dividirle por el mismo peso, la ordenada k de su centro de gravedad será

$$k = \frac{\pi\, dt \iint Vydydx}{\pi \cdot Qdt} = \frac{\iint Vydydx}{Q};$$

de donde se saca

$$Qk = \iint Vydydx;$$

y la cantidad de accion anterior se reduce á

$$\pi Qkdt.$$

De la misma manera, puesto que Q tiene el mismo valor en todas las secciones, la cantidad de accion resistente producida por la presion sobre la seccion inferior $A'B'$ será

$$-\pi Qdt\,(k + \triangle k);$$

que sumada con la anterior y duplicada da

$$-2\pi Qdt \triangle k$$

para el segundo término del segundo miembro.

125. Réstanos valuar la cantidad de accion producida por la resistencia á que da motivo la adherencia de las moléculas fluidas. Por lo que dejamos dicho en el núm. 97 se conoce que esta resistencia debe ser proporcional á la extension de las paredes con quienes está en contacto la masa fluida $ABB'A'$, esto es, al producto $c\triangle s$ del perímetro bañado c por la longitud $\triangle s$. Tambien debe ser proporcional á la *densidad* del fluido ó á la cantidad de materia contenida en la unidad de volúmen, esto es, á $\frac{\Pi}{g}$, porque cuanto mayor sea esta, mayor resistencia tiene que vencer el agua para romper el engrane de sus moléculas. Por último, esta resistencia crece con la velocidad del fluido, pero en mayor razon que esta velocidad; y para formar la funcion de la velocidad media de un fluido, á quien es proporcional la resistencia, se ha escrito la série

$$L + Mv + Nv^2 + Pv^3 + Rv^4 + \&c.$$

designando por L un número, que multiplicado por los factores anteriores, produciria la fuerza necesaria para hacer que el movimiento estuviese á punto de verificarse, y por M, N, P, &c. coeficientes numéricos, que asi como el anterior deben ser determinados por la experiencia. El valor que esta da para el primer término L es sumamente pequeño y puede despreciarse. Tambien ha hecho ver la experiencia que dentro de los límites en que suele hallarse la velocidad media de las corrientes, pueden bastar siempre los dos términos $Mv + Nv^2$. La expresion pues de la resistencia de que tratamos es

$$\frac{c\Pi}{g}\,(Mv + Nv^2)\,\triangle s;$$

y la cantidad de accion debida á esta fuerza mientras la porcion $ABB'A'$ del fluido sobre quien obra corre la longitud vdt tendrá el valor

$$\frac{\Pi c}{g}\,(Mv + Nv^2)\,\triangle s\,.\,vdt.$$

126. La ecuacion del movimiento de la corriente enunciada en el núm. 121 se puede ya escribir, y es

$$\frac{1{,}26\,\Pi\,Q\,dt}{g}\,.\,\Delta\,.\,v^2=2\left(\Pi\,Qdt\,(\Delta z+\Delta k)-\Pi\,Qdt\,\Delta k\right.$$
$$\left.-\frac{\Pi}{g}\,c\,(Mv+Nv^2)\,\Delta s\,.\,vdt\right);$$

que reducida, dividida por $\Pi\,Qdt$, y poniendo $\frac{1}{\omega}$ en lugar de $\frac{v}{Q}$ se convierte en

$$1{,}26\,\Delta\,\frac{v^2}{2g}=\Delta z-\frac{c}{g\omega}\,(Mv+Nv^2)\,\Delta s;$$

ó

$$\Delta z=\frac{c}{\omega}\left(\frac{Mv}{g}+\frac{Nv^2}{g}\right)\Delta s+1{,}26\,\Delta\,\frac{v^2}{2g}.$$

127. En cuanto á los coeficientes M y N adoptaremos los valores determinados por Eytelwein, que dedujo de 91 experiencias hechas por Dubuat, Brunings, Funck y Woltman en diferentes rios y canales, cuyas velocidades medias variaban de $5^p{,}34$ á $104^p{,}22$; las pendientes desde $\frac{1}{3333}$ á $\frac{1}{100}$, y las áreas de la seccion desde 26^{pp} hasta cerca de $3.000.000^{pp}$. ó 20.660 pies cuadrados. Los números que establece referidos á la pulgada española como unidad de medida son (*)

$$M=0{,}010252\qquad N=0{,}0035855$$

(*) Los números dados por Eytelwein, siendo el metro la unidad de medida, son

$$M'=0{,}000238005,\qquad N'=0{,}0035855.$$

Para traducir la fórmula á medidas españolas no hay mas que imitar el procedimiento ordinario del álgebra, esto es, indicar las operaciones que se harian, si teniendo las cantidades Δz, c, ω &c. en pulgadas españolas se quisiese comprobar la fórmula. Siendo $m=43{,}07$ las pulgadas que tiene un metro, escribiríamos

$$\frac{\Delta z}{m}=\frac{\frac{c}{m}}{\frac{\omega}{m^2}}\left(\frac{M'}{g}\,.\,v+\frac{N'}{g}\,.\,\frac{v^2}{m}\right)\frac{\Delta s}{m}+1{,}26\,\Delta\,\frac{v^2}{2gm};$$

y multiplicando por m

$$\Delta z=\frac{c\,\Delta s}{\omega}\left(\frac{M'm}{g}\,v+\frac{N'}{g}\,v^2\right)+1{,}26\,\Delta\,\frac{v^2}{2g};$$

donde se ve que el coeficiente M' debe ser multiplicado por m para tener su correspondiente M, y que el N' es el mismo N en medidas españolas.

Este medio de traduccion de las fórmulas de unas medidas á otras es sumamente cómodo y no expone á equivocaciones.

En los rios y canales de mucho caudal podrá ser conveniente tomar el pie español por unidad; entonces los coeficientes A y B son

$$A=0{,}000024265;\quad \log.\ A=5{,}3849721$$
$$B=0{,}000101852;\quad \log.\ B=6{,}0079705.$$

que divididos por $g=422^p{,}43$, valor que atribuyó Eytelwein á la gravedad, dan

$$\frac{M}{g}=A=0{,}000024265;\quad \log.\ A=5{,}3849721:$$

$$\frac{N}{g}=B=0{,}0000084877;\quad \log.\ B=4{,}9287893.$$

128. La ecuacion del movimiento puede tambien expresarse en funcion de la pendiente del fondo observando que por una parte

$$B'a'=BA+Bb=h+i\Delta s$$

por otra $B'a'=BA\pm\Delta h+a'A'=h\pm\Delta h+\Delta z$

tomando el signo superior cuando crezca la profundidad del agua desde la seccion AB á la $A'B'$, y el inferior cuan-

do mengüe dicha profundidad. Igualando los dos valores se saca

$$\Delta z = i \Delta s \mp \Delta h,$$

y la ecuacion se convierte en

$$\Delta s \left(i - \frac{c}{\omega} (Av + Bv^2) \right) = \pm \Delta h + 1{,}26 \, \Delta \frac{v^2}{2g}.$$

129. La ecuacion del núm. 126

$$\Delta z = \frac{c}{\omega} (Av + Bv^2) \, \Delta s + 1{,}26 \, \Delta \frac{v^2}{2g}$$

puede servir para determinar las pendientes de superficie de porciones sucesivas de una corriente cualquiera, y por consiguiente la curva de su perfil longitudinal, siempre que se conozcan los valores que en los extremos de cada una de las porciones tienen las cantidades c, ω, v.

Si se supone que la velocidad v es la misma en los dos extremos de la porcion Δs, lo que exige que ω sea tambien constante por serlo $Q = \omega v$, el último término desaparece, y la expresion

$$\Delta z = \frac{c}{\omega} (Av + Bv^2) \, \Delta s$$

hace ver que el primer término del segundo miembro de la ecuacion general no es otra cosa que la diferencia de nivel de los dos extremos de la superficie, ó bien la pendiente absoluta de la superficie de la porcion Δs, que tendria lugar en el caso de que fuese uniforme el movimiento de la corriente. El coeficiente $\frac{c}{\omega} (Av + Bv^2)$ representa el seno, ó lo que es casi lo mismo la tangente del ángulo que dicha superficie forma en dicho caso con la horizontal, ó la pendiente por unidad de longitud. Este término es esencialmente positivo.

El segundo término viene á ser la diferencia de las alturas debidas á las velocidades medias del agua en los dos

extremos de la porcion, multiplicada por el coeficiente constante 1,26; y segun lo que se ha visto en los núms. 122 y 105, este multiplicador proviene de la variacion de las velocidades que tiene lugar en los diversos puntos de una misma seccion. Si todos estuviesen animados de una velocidad igual á la media, el coeficiente seria $= 1$. El término de que se trata será positivo ó negativo, segun que la velocidad en el extremo inferior $A'B'$ sea mayor ó menor que la velocidad en el extremo superior AB.

130. Si en la ecuacion del movimiento uniforme ó en que v es constante

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{c}{\omega} (Av + Bv^2)$$

es tambien constante para todas las porciones el perímetro bañado c, tambien lo será todo el segundo miembro. La pendiente de la superficie será constante, y su perfil vendrá á ser una línea recta. Este es el caso que ocurre con mas frecuencia en los canales, donde la seccion es un trapecio de dimensiones y figura constantes, y la pendiente del fondo una línea recta: la pendiente de superficie resulta una recta paralela á la del fondo.

No sucede lo mismo cuando el perímetro c varía de una porcion á otra. La pendiente $\frac{\Delta z}{\Delta s}$ de superficie variará tambien y la línea del hilo de agua será una curva cuyas ordenadas podrán calcularse para los puntos extremos de cada una de las porciones por medio de esta ecuacion.

Procediendo de lo simple á lo compuesto vamos á aplicar la ecuacion anterior á los problemas principales que pueden ofrecerse en el establecimiento de los canales, dejando para despues su aplicacion á los rios, y últimamente á las cañerías ó acueductos cerrados.

CAPITULO IV.

DEL MOVIMIENTO DEL AGUA EN LOS CANALES Ó ACUEDUCTOS DESCUBIERTOS.

131. El perfil trasversal de un canal abierto en el terreno suele ser un trapecio, fig. 29: el de los acueductos cuando se revisten de mampostería, un rectángulo:

Llamando

a la anchura LL' de la solera,

h la altura del agua,

n el talud de los lados ó la relacion de la base con su altura,

i la pendiente del fondo ó de la superficie por unidad de longitud, que se supone constante;

y conservando las otras notaciones del núm. 120, se tiene

$$c=a+2h\sqrt{(1+n^2)};$$
$$\omega=h(a+nh);$$
$$Q=\omega v;$$
$$i=\frac{c}{\omega}(0{,}000024265v+0{,}0000084877v^2):$$

estas cuatro ecuaciones servirán para determinar cuatro de las siete cantidades v, Q, ω, i, c, a, b siempre que sean conocidas las otras tres.

Cuando la seccion es rectangular, n es cero, y á las dos primeras ecuaciones se sustituyen las

$$c=a+2h;$$
$$\omega=ah.$$

Si la seccion es un arco de círculo, lo que ocurre en los acueductos que se hacen de barro cocido en figura de semicilindros, llamando

r el radio aB, fig. 30,

h la sagita AB ó la altura del agua,

α el ángulo DaB medido en el círculo del rádio$=1$,

dichas ecuaciones serán

$$c=2\alpha r$$
$$\omega=\alpha r^2-r^2\,\text{sen.}\,\alpha\,\cos.\,\alpha=r^2\left(\alpha-\tfrac{1}{2}\,\text{sen.}\,2\alpha\right);$$

determinándose el valor de α por la expresion

$$h=r\,(1-\cos.\,\alpha)=2r\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

que da

$$\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{h}{2r}},$$

y despues de obtenido en grados se multiplicará por la relacion $\frac{\pi}{180}$ para sustituirlo en dichas ecuaciones.

132. Primer problema. Si se quiere la velocidad media y el gasto del canal, se tendrá

$$v=-1{,}43+\sqrt{\left(117816\,\frac{i\omega}{c}+2{,}04\right)};$$

ó con suficiente exactitud para la práctica

$$v=-1{,}43+343{,}245\sqrt{\frac{i\omega}{c}}.$$

En midiendo con mucha precision la pendiente i del canal, esta fórmula da el medio mas seguro de hallar la velocidad media, de todos los expuestos en los núms. 109 y siguientes, á no ser en el caso de conocerse de antemano el gasto Q, pues entonces basta dividirle por la seccion ω para obtenerla. El mismo procedimiento puede aplicarse á un rio en las porciones de su longitud que tengan la pendiente uniforme, y cuyo álveo ofrezca bastante regularidad para que pueda tomarse su seccion media. Pero es menester que la porcion del rio cuya pendiente se mida no baje de 4000 pies de largo, y que ademas no experimente perturbacion

notable el movimiento del agua mas arriba ó mas abajo de dicho tramo.

Si la velocidad es muy grande, reputándose tal la que excede de 24 pulgadas, se usa de la fórmula mas sencilla

$$v = 334{,}70\sqrt{\frac{i\omega}{c}};$$

uno de estos valores se sustituirá en la tercera ecuacion para hallar el gasto Q por segundo.

Sea por ejemplo un canal cuya seccion es un trapecio que tenga cuatro pies de anchura en el fondo, seis pies de altura de agua, y de talud $n=1$. La pendiente es de $\frac{1}{1000}$ y se pide la cantidad de agua que lleva.

Siendo $a=48^{p}$, $h=72^{p}$, $n=1$, $i=\frac{1}{1000}$ resulta

$$\omega = h\,(a+nh) = 8640^{pp};$$
$$c = a+2h\sqrt{(1+n^2)} = 251^{p},65;$$
$$\frac{\omega}{c} = 34^{p}33;$$

y segun que se haga uso del 1.° ó 2.° valor de v se saca

$$v = -1{,}43+63{,}62 = 62^{p},19;\quad Q = 537322^{ppp}$$
$$v = -1{,}43+63{,}60 = 62^{p},17;\quad Q = 537150^{ppp}.$$

La tercera fórmula daria

$$v = 62^{p}02;\quad Q = 535853^{ppp}.$$

133. Segundo problema. Otras veces se tiene que buscar la pendiente que debe darse al fondo del canal, como en el ejemplo siguiente.

Para el canal del Ourcq que debia proveer de aguas potables á Paris y servir al mismo tiempo para la navegacion, se tenian disponibles 241140^{ppp} por segundo: la profundidad del agua debia ser de $64^{p},60$, á fin de que pudiesen los barcos navegar: la velocidad media no debia bajar de

$15^{p},07$ para que no se alterase la calidad del agua, y conservase su salubridad: la naturaleza del terreno exigia un talud de $1\frac{1}{2}$ de base por 1 de altura.

Los datos son $Q=241140^{ppp}$; $v=15^{p},07$; $h=64^{p},60$; $n=1{,}50$; y se halla

$$\omega = \frac{Q}{v} = 16004^{pp}:$$
$$a = \frac{\omega - nh^2}{h} = 150^{p},84:$$
$$c = a+2h\sqrt{(1+n^2)} = 383^{p},76:$$

y la ecuacion del núm. 131 da

$$i = 0{,}000055.$$

Mr. Girard, autor del proyecto de este canal, consideró que las plantas acuátiles que se crian siempre en el fondo y taludes de los canales, hacen mucho mayor el perímetro bañado, y aumentan por consiguiente la resistencia. Por esta razon multiplicó la anterior pendiente por el número 1,91 y adoptó $i=0{,}0001056$, resultándole $436^{p},70$ de pendiente absoluta para toda la longitud 344536 pies ó 17,22 leguas que tiene el canal. Este partido es de seguir en circunstancias semejantes, á no ser que se cuide de cortar con frecuencia dichas plantas.

134. Tercer problema. Tambien puede ocurrir el caso en que dada una de las dimensiones a, h del canal se tenga que buscar la otra. Los discípulos se ejercitarán en el ejemplo siguiente:

Determinar la anchura que debe darse al fondo de un canal destinado á conducir 240.000^{ppp} de agua por segundo, siendo de 60^{p} la altura del agua y $\frac{1}{10.000}$ la pendiente: la naturaleza del terreno obliga á dar á los lados un talud de dos veces la altura.

Aqui es $Q=240.000$; $i=0,0001$; $h=60$; $n=2$: calculados los valores de ω, de c y de v se sustituirán en la ecuacion última del núm. 131 que viene á ser

$$i\omega^3 \pm cQ\,(A\omega + BQ) = 0,$$

y se convertirá en

$$a^3 + 343,84\,a^2 - 42174,26\,a - 4860190 = 0.$$

Usaremos el método de las sustituciones sucesivas como en el núm. 85,

y haciendo $a=180^p$ resulta $+4514610=0$
bajando á $a=150$....... $-74930=0$
subiendo á $a=151$....... $+54350=0$.

Es excusado llevar mas adelante la aproximacion, bastando saber que el valor de a se halla comprendido entre 150 y 151 pulgadas. Si se hace $a=150^p,50$, resulta $\omega=16230^{pp}$, y $v=\frac{Q}{\omega}=14^p,79$.

135. Cuarto problema. Las mas veces el caudal de agua que ha de pasar por el canal, y la pendiente de que se puede disponer son las cantidades conocidas, y despues de determinar la seccion ω queda al arbitrio del ingeniero la figura de esta seccion, pudiendo guiarse por consideraciones de economía en la construccion y en el entretenimiento, y tambien por la condicion de que el perímetro sea el menor posible con relacion á la área de esta seccion, á fin de que ofrezca la menor posible resistencia al movimiento del agua.

Esta última condicion se cumple adoptando formas circulares ó de polígonos regulares de gran número de lados, puesto que los semipolígonos guardan con las semisecciones la misma relacion que los polígonos enteros con las áreas que encierran. Pero sin embargo de esto en los acueductos de mampostería y de madera se prefiere generalmente por razones de economía y de facilidad en la construccion la figura de un semicuadrado, resultando entonces el ancho del fondo igual al doble de la altura del agua. En los canales trapecios que se abren en el terreno la figura mas ventajosa seria la de un semiexágono; pero correspondiéndole un talud $n=0,58$, no bastaria este las mas veces para que se mantuviesen las tierras, á no ser que se revistiesen de una pared de piedra seca (*), y siendo preciso renunciar al polígono regular se adoptará el talud que convenga á la naturaleza del terreno, que suele estar comprendido entre $n=1\frac{1}{2}$ y $n=2\frac{1}{2}$ y ser las mas veces $n=2$. En cuanto á la anchura del fondo se hace de 4 á 6 veces la altura del agua. Lo que queda que determinar es esta altura, que será dada por una ecuacion de 5.° grado.

Sea por ejemplo $Q=240.000$; $i=0,0001$; $n=2$; $a=4h$. Se tendrá $\omega=6h^2$; $c=8,47\,h$; y la ecuacion

$$i\omega^3 - cQ\,(A\omega + BQ) = 0$$

se reduce á

$$h^5 - 13703\,h^2 - 191580092 = 0.$$

Para resolverla se hará

$h=46^p$ lo que produce $-14613132=0$.
$h=47$ .... $+7494358=0$.
$h=46,75$.......... $+1780488=0$.
$h=46,625$......... $-529100=0$.

Se ve que la altura del agua está comprendida entre $46\frac{5}{8}$ y $46\frac{3}{4}$ pulgadas, acercándose mas al primer límite. Adoptando el valor $h=46^p,66$ se hallará despues

$$a=186^p,64;\ \omega=13063^{pp};\ v=18^p,37.$$

136. Para la solucion de estos problemas se debe poner mucho cuidado en medir con precision las cantidades que

(*) En algunos parages de España se conserva no obstante el talud de $\frac{1}{2}$ y aun menor, sin notarse derrumbos.

sirven de datos, y esto en las porciones de canal en que se halle bien establecida la uniformidad del movimiento. Por ejemplo, una ligera equivocacion en la medida de la pendiente produciria un error considerable en la valuacion de la velocidad, y por consiguiente en el gasto del canal, segun puede notarse por la ecuacion del núm. 132. Lo mas seguro es medir la pendiente absoluta de todo el canal, ó la diferencia de nivel de su superficie entre los dos extremos, y dividirla por su longitud para tener la pendiente i por unidad de medida. Si el canal está por abrir, es necesario en el proyecto, para averiguar su pendiente, no atenerse exclusivamente á la diferencia de nivel que se haya medido entre el rio ó depósito que alimente el canal y el punto donde ha de ir á parar, sino tambien atender al modo con que entren las aguas desde el rio á este canal, como vamos á ver.

Del bocal de los canales.

137. Al establecer la ecuacion general del movimiento de las corrientes partimos de la suposicion de que el agua despues de llegar á la seccion superior AB, fig. 28, continuaba su curso desde ella en adelante hácia la seccion $A'B'$ sin ninguna alteracion *súbita* en las circunstancias de su movimiento. Conviene pues examinar qué es lo que sucede en el orígen de estos canales, alimentados ordinariamente por rios cuyas aguas han sido levantadas por medio de una presa.

Unas veces la cabeza del canal está enteramente abierta de arriba abajo, y otras está guarnecida de compuertas que se abren mas ó menos.

138. En el primer caso al pasar el agua del depósito al canal, se acelera su movimiento á lo largo del plano inclinado que se forma; pero presto continúa uniformemente, y la velocidad adquirida es, prescindiendo de la contraccion, la de este movimiento uniforme. Si se cuenta con la contraccion que experimenta la seccion fluida á su entrada en el canal, llamando m su coeficiente y v la velocidad uniforme del canal, dicha velocidad al extremo de la caida será $\frac{v}{m}$, y la altura debida á esta velocidad $\frac{v^2}{2gm^2}$ será la caida ó depresion que experimentará el agua inmediatamente despues de su entrada en el canal; será pues necesario restarla de la altura del agua en el depósito sobre el umbral del canal para tener la altura efectiva del agua en el orígen del canal uniforme, si se ha de valuar con exactitud la pendiente de este. Llamando

h' la altura de la superficie del depósito ó del rio sobre el umbral de entrada;

h la altura del agua en el canal cuando el movimiento empieza á ser uniforme, lo que tiene efectivamente lugar á corta distancia del orígen;

se tendrá la ecuacion

$$h'-h=\frac{v^2}{2gm^2},$$

ó poniendo por v su valor del núm. 132

$$h'-h=\frac{1}{2gm^2}\left(-1,43+343,245\sqrt{\frac{i\omega}{c}}\right)^2,$$

en cuyo segundo miembro se pondrán por ω y c sus valores del núm. 131; i es tambien funcion de h: representando por H la diferencia de nivel entre la superficie del depósito y la del extremo inferior del canal, y por S la longitud de este canal, su valor es

$$i=\frac{H-(h'-h)}{S}$$

que se sustituirá tambien en dicho segundo miembro. En cuanto al coeficiente de contraccion m, su valor se ha hallado por Dubuat comprendido entre 0,91 y 0,73 para los canales de mucha velocidad, y poco inferior á 0,97 para aquellos en que es pequeña. Eytelwein establece $m=0,95$ en los canales grandes, y $m=0,86$ en los estrechos como los que sirven para conducir el agua á las fábricas.

Si el rio llegase directamente al canal con cierta velocidad, la caida $h'-h$ deberia disminuirse en una cantidad igual á la altura debida á esta velocidad.

El ejemplo siguiente que propone Mr. D'Aubuisson es muy á propósito para hacer conocer el uso de la fórmula anterior en las aplicaciones.

De un rio en que se halla construida una azud ó presa se ha comprado la cantidad de agua que salga por una almenara rectangular, cuya anchura es de 15 pies, y cuyo umbral ó solera está á 5 pies debajo de la superficie del agua en su mayor menguante. El agua debe ir á parar á una fábrica que dista 1200 pies de la presa y obrar su superficie sobre un punto 1,5 pies mas bajo que la del depósito. Se pregunta cuál será el volúmen de agua que en cada segundo llevará á la fábrica una acequia rectangular del tamaño de la abertura.

Se tiene aqui $\omega=180h$; $c=180+2h$; $i=\frac{18-(60-h)}{14400}=\frac{h-42}{14400}$; $h'=60$; y tomando un promedio entre los coeficientes de Eytelwein, $m=0,905$. Sustituidos estos valores y el de $g=421,15$ en la última fórmula, resulta

$$h=60-0,00145\left(8,5811\sqrt{\frac{h(h-42)}{90+h}}-1,43\right)^2:$$

para hallar el valor de h sin preparar esta ecuacion, observando que debe diferir poco de h', supondremos $h=58^p$, que sustituido da $h=59^p25$; puesto este valor en la ecuacion, resulta $h=59^p,18$; operando del mismo modo hallaremos $h=59^p,186$, $h=59^p,1855$; asegurados de que h se halla comprendido entre los dos últimos valores, tomaremos $h=59^p,1855$ que dará $i=0,00119$.

La ecuacion del núm. 132 en que es ya conocido el segundo miembro dará
$v=69^p,43$; y el producto del canal será
$Q=739665^{ppp}$ ó 427,06 pies cúbicos por segundo.

139. Cuando el agua entra en el canal por bocas guarnecidas de compuertas, el caudal que conduzca ha de ser igual al volúmen de agua que salga por estas aberturas, y cuyo valor ha sido calculado para los diferentes casos en los núms. 88, 89 y 90. Se tiene asi una relacion entre las dimensiones de estas aberturas y las del canal que servirá para resolver varios problemas.

Supongamos como en el núm. 88 que el agua del canal deje cubierta la abertura rectangular, cuyas dimensiones sean a' y b'; llamemos h' la altura de la superficie del depósito sobre el fondo del canal en su entrada, y conservemos á i, c, ω, h, a la significacion dada en los números anteriores. Combinando los valores de Q de los números 88 y 131, la ecuacion

$$ma'b'\sqrt{2g(h'-h)}=\omega\left(-1,43+343,245\sqrt{\frac{h\omega}{c}}\right),$$

en que se sustituirán por ω y c sus valores del núm. 131, servirá para calcular una de las cantidades a', b', h, a, cuando las otras sean dadas. El problema que en la práctica ocurre mas á menudo es determinar lo que debe levantarse la compuerta ó la altura b' que ha de darse á las bocas, conocidas que sean las demas cantidades.

Arreglo de la velocidad de los canales.

140. Queda dicho en el núm. 133 que cuando un acueducto se destina á conducir aguas potables no debia bajar su velocidad de 15 pulgadas. Cuanto mayor sea esta velocidad, tanto mas pura y saludable llegará el agua á su destino; pero de todos modos en el clima de España creo deberá adoptarse un límite un poco mayor que el designado para Paris, y puede ser el de 20 pulgadas.

141. Por otra parte es necesario atender á que la solera del canal no sea degradada por la corriente, lo que sucederia si la velocidad en el fondo llegase al límite en que empieza á arrastrar las materias de que está formado. Este límite, segun experiencias de Dubuat, es para las diferentes calidades del fondo, el siguiente:

NATURALEZA DEL LECHO.	Límite de la velocidad.
	Pulgadas.
Tierra esponjosa, lodo	3,27
Arcilla tierna	6,55
Arena	13,10
Grava	26,19
Cascajo	26,44
Piedras machacadas	52,54
Morrillos aglomerados, esquisto blando	65,46
Roca en capas	78,81
Roca dura	131,35

142. El ingeniero cuidará pues en el establecimiento de los canales de que su velocidad media no llegue en ningun

caso á los $\frac{4}{3}$ de este límite, segun indica la fórmula del número 99, disponiendo convenientemente de las dimensiones de su seccion trasversal y de su pendiente longitudinal.

Se trata, por ejemplo, de abrir un canal en un terreno de grava para conducir en cada segundo un volúmen de agua Q.

El límite de la velocidad media del canal será segun acabamos de decir

$$v=\frac{4}{3}\cdot 26{,}19=34^p{,}92.$$

Si se puede disponer de la pendiente, la seccion trasversal será dada por la fórmula

$$\omega=\frac{Q}{v}$$

en que se hará $v=34^p$: las dimensiones se arreglarán segun lo prevenido en el núm. 135, y se calculará el valor de c.

La pendiente se determinará por la fórmula del número 131

$$i=\frac{cv}{\omega}\,(0{,}000024265+0{,}0000084877\,v).$$

143. Si la pendiente es dada, despejando c en esta ecuacion, y sustituyendo por ω su valor, se tendrá

$$c=\frac{Qi}{v^2\,(0{,}000024265+0{,}0000084877v)},$$

y conocidos c y ω, se buscarán las dimensiones a, h del canal por medio de las ecuaciones del número citado

$$a+2h\sqrt{(1+n^2)}=c,$$

$$h(a+nh)=\omega,$$

que dan

$$a=\frac{c(\sqrt{1+n^2}-n)\pm\sqrt{1+n^2}\sqrt{c^2-4\omega(2\sqrt{1+n^2}-n)}}{2\sqrt{1+n^2}-n};$$

$$h=\frac{c\mp\sqrt{c^2-4\omega(2\sqrt{1+n^2}-n)}}{2(2\sqrt{1+n^2}-n)}:$$

y cuando el canal sea rectangular,

$$a=\frac{c\pm\sqrt{c^2-8\omega}}{2};$$

$$h=\frac{c\mp\sqrt{c^2-8\omega}}{4}.$$

CAPITULO V.

DEL MOVIMIENTO DEL AGUA EN LOS RIOS.

144. Las nieves que por mas ó menos tiempo quedan depositadas en las cumbres de las cordilleras, y las aguas que de la atmósfera absorven las montañas, dan orígen á fuentes ó riachuelos, cuya reunion en un solo tronco constituye lo que se llama *rio*. Entre estos riachuelos aquel que se halla mas próximamente en la direccion general del rio, y cuya fuente está por lo comun mas distante que las demas de su desembocadura, suele gozar desde el principio del nombre del rio principal. Los otros de la cuenca, reunidos en los valles secundarios, dan á los rios laterales un nombre que se pierde en su confluencia con el tronco; y lo mismo sucede á los arroyos de tercer órden cuando tributan sus aguas á los rios secundarios.

145. Consideremos aparte la cuenca de un rio. Todas las aguas que caen sobre su superficie, asi como las que proceden de las fuentes y de las nieves, correrán segun las líneas de mayor pendiente que correspondan á cada uno de sus puntos. Mientras marchen por las montañas la configuracion del terreno les tiene marcado el camino que han de seguir. Los cantos irrregulares desprendidos de las montañas, las tierras desgajadas de sus costados, no son obstáculos suficientes para variar su rumbo. Las tierras y piedras son arrebatadas hácia adelante en sus crecidas, dejando lugar á las que de nuevo se desprendan. Las tierras disueltas en el agua corren con ella largo espacio en el fondo del valle hasta que muy menguada su velocidad se precipitan en el fondo. Las piedras al rodar van perdiendo sus ángulos y sus esquinas. Sus pedazos son mas fácilmente arrastrados, se redondean de igual manera en su marcha, y van asi tanto mas lejos cuanto es menor su volúmen y su pesantez específica. Se notan en efecto al examinar el curso de un rio, partiendo desde su orígen, primeramente peñas irregulares poliedras de gran tamaño, y despues morrillos redondos cuyo volúmen va en disminucion, y se conocen con los nombres de piedras rodadas, casquijo, grava, y por último arena, cuyos granos mas y mas ténues se combinan al fin con los despojos vegetales, y constituyen el fango ó lama que forma el lecho de los rios cuando es muy corta su velocidad. Si alguna vez no se observa esta ley, si por ejemplo aparecen gruesos morrillos redondos en las llanuras, esto se debe á que en las revoluciones del globo, que precedieron á su estado actual, han sido trasportados estos materiales á los parages en que se encuentran, no haciendo las crecidas otra funcion que la de ponerlos en descubierto. Y la pequeñez progresiva de las materias que forman el lecho de los rios, no es debida solamente á la mayor facilidad con que son arrastradas; es debida ademas á otra causa de poco momento

al parecer, pero muy poderosa en sus resultados por la continuidad de su accion en la série de los siglos: se habla de la fuerza de descomposicion de los elementos atmosféricos y de la accion corrosiva de las aguas. Cuanto mas lejos del orígen esten dichas materias, mas tiempo habrá con efecto trascurrido desde que fueron arrancadas de su sitio primitivo, mas tiempo habrá obrado esta fuerza sobre ellas, y mas por consiguiente habrá reducido su volúmen.

146. Desde que el rio baja á la llanura ó fondo de la cuenca, cuyo terreno es de los llamados *de trasporte* (porque se presume con razon que las aguas pluviales despues de descomponer y reducir á tierra la costra del globo, han precipitado con sus corrientes estas tierras desde las cumbres á las partes bajas de su superficie), los obstáculos que se presentan á su carrera son de menos monta, y las dimensiones de la madre ó álveo que se forma dependen necesariamente de la naturaleza del suelo, de su caudal y de la velocidad de su corriente. Si con efecto no es proporcionada á esta velocidad y volúmen la tenacidad del terreno, cederá este á la accion de las aguas, las cuales ahondarán y sobre todo ensancharán el álveo. Si por el contrario fueren demasiadas la anchura y profundidad, el rio reducirá por sí mismo estas dimensiones, depositando en el fondo ó en una de las márgenes las piedras y tierra que acarree en sus crecidas. Cuando esta relacion entre las dimensiones del álveo, la tenacidad del terreno, el caudal y la velocidad del rio, es en todos los parages la que corresponde al equilibrio, se dice que es *estable* el régimen del rio; pero no pudiendo prescindirse de que se altere notablemente el caudal y la velocidad, bien se ve que el equilibrio no puede existir con esta estabilidad. En las grandes crecidas, bien que cerca de su nacimiento, no puede el rio salir de su lecho por

hallarse este encajonado, pero arrastra las materias que le revisten y las deposita en las partes inferiores. De estas materias unas, segun dejamos dicho, son llevadas hasta su embocadura en el mar, donde forman y acrecientan los bancos, las barras ó las dunas: otras se quedan en el fondo de los valles que van levantando poco á poco á expensas de las tierras de las montañas. Disminuida asi la profundidad del rio por una crecida, queda el lecho menos capaz de resistir á la siguiente, y ofreciendo las márgenes menos resistencia que el fondo, son rotas por el ímpetu de las aguas, las cuales se abren paso dividiendo el rio en diversos brazos que imposibilitan la navegacion, ó tambien inundan y cubren con tierra, y lo que es muy nocivo, con grava ó cascajo los campos riberiegos.

147. En el caso que consideramos de marchar el rio por una llanura, ó de que su fondo sea muy poco inclinado, la componente de la gravedad que impele sus aguas en el sentido de la línea de mayor pendiente es las mas veces muy pequeña. Basta á desviarle de su direccion cualquier estorbo, aunque solo consista en un poco mas de dureza ó tenacidad del terreno; y de aqui las frecuentes sinuosidades del curso de los rios, que aumentando su longitud de un punto á otro para una misma pendiente absoluta, disminuyen la pendiente relativa, y por consiguiente la velocidad. Disminuida la velocidad, es forzoso, en virtud de la ley del movimiento permanente, que se aumente la área de la seccion, esto es, la anchura ó profundidad del rio, ó ambas á dos. Este efecto de las sinuosidades, ventajoso frecuentemente para la navegacion, expone el terreno riberiego á inundaciones y daños que no sobrevendrian si el rio caminase en línea recta.

En los recodos la márgen cóncava está tanto mas ex-

puesta á los ataques de la corriente cuanto menor es el ángulo de la nueva con la anterior direccion del rio. Por esto es mayor la profundidad cerca de esta orilla: el rio la escarpa continuamente y deja en la convexa opuesta las materias que arrastra en sus crecidas.

Si existe otro recodo no muy distante del primero y en sentido opuesto, habrá por consiguiente en el intervalo de los dos una seccion, las mas veces oblicua á la corriente, donde la profundidad del agua será casi la misma en toda la anchura. Tal es la razon de la posicion de los vados en estos parages.

148. La anchura de los rios es casi en todas partes mayor que su profundidad. Se da razon de este hecho observando: 1.° que la accion de la gravedad tiende á desmoronar las márgenes aumentando su talud, mientras que las materias del fondo son por lo mismo mas dificilmente removidas: 2.° que al desprenderse de las márgenes las materias, ordinariamente de acarreo, que las forman, se deslien las partes térreas y se las lleva consigo la corriente; pero las piedras, grava ó arena se precipitan en el fondo y aumentan su estabilidad, revistiéndole de estos materiales mas resistentes. El efecto de que tratamos será pues tanto mas notable cuanto mas suelto sea el terreno y mas mezclado esté de cascajo.

149. En los rios no sucede como en los canales que sea uniforme la pendiente del fondo ni constante la seccion trasversal. Pero las ecuaciones generales de los núms. 126 y 128 en que haremos para abreviar $\frac{1,26}{2g}=C$, y para mayor aproximacion en vez del término $\frac{c}{\omega}(Av+Bv^2)\Delta s$ correspondiente á sola una seccion, escribiremos el medio aritmético entre $\frac{c}{\omega}(Av+Bv^2)\Delta s$ y $\frac{c'}{\omega'}(Av'+Bv'^2)\Delta s$ pertenecientes á las dos secciones extremas, trasformándose asi en

$$\Delta z=\left(\frac{c}{\omega}(Av+Bv^2)+\frac{c'}{\omega'}(Av'+Bv'^2)\right)\frac{\Delta s}{2}+C\Delta v^2,$$

$$\Delta z=i\Delta s\mp\Delta h;$$

$$Q=\omega v,$$

ofrecen siempre los medios de descubrir las alteraciones que sobrevendrán á las cantidades que en ellas entran, en virtud de las que experimenten las demas.

Para simplificar el lenguage y hacer mas fácil el análisis de estas ecuaciones, supongamos que el plano horizontal HH, fig. 28, desde donde se cuentan las ordenadas de la superficie pase por el punto superior A: sustituyamos tambien como en el núm. 122 en vez de la seccion ω un rectángulo, cuya anchura sea a y la altura h. Dichas ecuaciones serán

$$\Delta z=\left[\frac{a+2h}{ah}(Av+Bv^2)+\frac{a'+2h'}{a'h'}(Av'+Bv'^2)\right]\frac{\Delta s}{2}+C\Delta v^2$$

$$\Delta z=i\Delta s\mp\Delta h;$$

$$Q=ahv.$$

150. Queda dicho en el núm. 129 que el primer término del segundo miembro de la primera representa la ordenada Δz que tendria el extremo A' de la porcion AA' si el movimiento fuese uniforme. A este término debe añadirse el segundo $C\Delta v^2$; si este es positivo, lo que sucederá, cuando crezca la velocidad desde A á A', la ordenada Δz crecerá y será mayor que la correspondiente al movimiento uniforme. Si es negativo, será menor dicha ordenada y aun puede llegar á ser cero ó negativa, lo que equivale á ser horizontal y aun en contrapendiente la superficie fluida, sin

que por ello deje de existir el movimiento en el sentido de la pendiente general del rio.

De aquí se deduce que el perfil longitudinal de la superficie de un rio es una curva ya cóncava, ya convexa hácia la parte superior, que tendrá por consiguiente varios puntos singulares de máxima y mínima ordenada y los intermedios de inflexion correspondientes. Aunque la ecuacion que consideramos no da mas puntos de la curva que los que estan separados por las porciones Δs de abscisa, con disminuir convenientemente estos intervalos se podrá llegar á descubrir la situacion de estos puntos notables y construir con la suficiente precision dicha curva, que será como la indicada en la fig. 31.

151. En cuanto á la seccion trasversal, su figura es tambien muy digna de ser reparada. Es una curva convexa, cuyo vértice corresponde al hilo del agua que goza de mayor velocidad, y baja igual ó desigualmente hácia las orillas segun el valor que tienen las velocidades de los respectivos filetes fluidos. Los perfiles trasversales figs. 32 y 33, el primero de un rio caudaloso y el segundo de un canal, ofrecen á la vista esta curva. Se da razon de la convexidad de la superficie fluida, observando que la presion ejercida por una molécula fluida en movimiento es siempre menor que la que tiene lugar cuando se halla en reposo. Llamando z la altura de la superficie de un depósito sobre una molécula de una corriente, altura á quien es debido su movimiento, y v la velocidad de esta molécula, la presion lateral que ejercerá es la debida á la altura $z-\frac{v^2}{2g}$ (*véase el núm.* 206) y menor por consiguiente que la debida á la altura z. Segun esto, corriendo mas veloces los filetes del medio, ejercerá cada uno una presion menor, y será necesario

mayor número de ellos, ó que su masa fluida esté mas alta para equilibrarse con la ejercida por los dotados de menor velocidad. La continuidad de esta ley respecto de cada filete y de su inmediato conduce á la formacion de la curva, que efectivamente aparece en la superficie fluida.

152. La segunda ecuacion da á conocer la pendiente i del fondo cuando se da el incremento ó disminucion que de una seccion á su inmediata adquiere la profundidad del agua. Esta pendiente i será mayor que la de la superficie, siempre que haya incremento de profundidad. En el caso contrario será menor.

153. La tercera ecuacion hace ver que si conservando constante la anchura del rio, crece ó mengua la altura de una seccion á otra, la velocidad menguará ó crecerá en la misma relacion, y recíprocamente. Tambien se deduce que si se ensancha ó angosta el álveo del rio, ocurrirán alteraciones inversas en la altura ó en la velocidad de las aguas, ó en ambas á dos simultáneamente.

154. Por último, si conservando el álveo la misma anchura recibe las aguas de un afluente, su profundidad se aumentará, pero no proporcionalmente al volúmen del fluido. Para computar al poco mas ó menos esta relacion escribiremos en vez de v su valor aproximado $334{,}7\sqrt{\frac{iah}{a+2h}}$ del núm. 132 y se tendrá

$$Q=334{,}7\,ah\sqrt{\frac{iah}{a+2h}};$$

si la anchura del rio, como por lo comun sucede, es muy grande respecto de su profundidad, se puede despreciar $2h$ delante de a en el denominador anterior, y entonces Q es proporcional á $h^{\frac{3}{2}}$, ó inversamente h será proporcional á la potencia $\frac{2}{3}$ del caudal Q.

155. Las consideraciones expuestas conducen á indicar los trabajos que deben ejecutarse para establecer en cuanto sea dable el régimen de los rios.

Cuando una de las márgenes es corroida por la corriente, el remedio mas adecuado es revestirla con materiales capaces de resistir á la accion del agua, pero conservándole su propia forma. En el caso de haber sido destruida completamente, y que se quiera restituir á la agricultura el terreno robado por el rio, se formará un terraplen revestido á lo largo de la primitiva orilla, cuidando de poner sus extremos en las direcciones de las márgenes existentes. Es viciosa y perjudicial á ambas riberas toda construccion trasversal que tienda á hacer variar repentinamente la direccion de una corriente. Tampoco conviene en general enderezar una corriente con la mira de que no degrade ni una ni otra márgen, puesto que aumentándose su pendiente, se aumentará la fuerza en cuya virtud son arrastradas las tierras.

156. Los bancos de grava ó cascajo que se forman en el lecho de los rios, y cuyos inconvenientes han sido notados en el núm. 146, indican siempre un esceso de anchura en el álveo; pero es muy dificil hacerlos desaparecer. En vano se quitarian del medio en el intervalo de una crecida á otra; la primera que sobreviniese los volveria á depositar. El único medio consiste en estrechar el álveo entre dos diques mas altos que las mayores avenidas: no se forman asi bancos: la profundidad del rio y la hechura de sus márgenes hacen cómoda la navegacion. Pero van sedimentándose las materias arrastradas por la corriente, levantan mas y mas el fondo, obligan á elevar en proporcion los diques, la masa total del rio llega á hallarse mas alta que los campos inmediatos, y en el caso de cualquier accidente que rompiese los diques ó de una avenida extraordinaria, son inminentes los mayores desastres. Tal es sin embargo el partido que para arreglar el Pó fué tomado.

En el Loira se tomó otro contrario. Se le dejó una madre muy ancha, por donde se esparraman sus aguas, contenidas entre altos diques. Los campos estan seguros de las avenidas; pero la navegacion es penosa por falta de fondo y de caminos de sirga, y se ha desperdiciado demasiado terreno.

Puesto que las materias de estos bancos proceden de las montañas por donde pasa el rio á poca distancia de su nacimiento, se ha propuesto tambien cerrarles el paso á los valles por medio de diques que obliguen al agua á saltar por cascadas. Teniendo poca velocidad en los intervalos de estas cascadas, no podría arrastrar otras materias que las disolubles en el agua y estas no son ni con mucho tan perjudiciales como la grava y casquijo.

157. Otra de las atenciones de un ingeniero al arreglar la corriente de un rio es la de precaver las inundaciones, principalmente en el suelo de las poblaciones riberiegas.

Cuando por copiosas lluvias ó por deshacerse las nieves recibe el lecho de un rio una gran cantidad de agua, la velocidad, dependiente como siempre de la inclinacion del lecho y del tamaño de la seccion trasversal, es mui grande en las partes superiores del rio; las aguas se levantan mucho, pero las crecidas duran poco. En las partes inferiores donde la pendiente es menor, y el álveo mas grande, la crecida no subirá tanto, pero en cambio durará mas tiempo. De todos modos el exceso de caudal que sobrevenga á las partes superiores no puede menos de recaer sobre las inferiores, y en vano se intentaría disminuirle. Lo que puede conseguirse es rebajar la altura de las crecidas, ya sea aumentando la anchura del lecho ó abriendo nuevos brazos, ya sea aumen-

tando la pendiente por la supresion de las presas existentes aguas-abajo del punto que se quiere abrigar, ó por la construccion de otras nuevas aguas-arriba.

158. Pasemos ya á aplicar las ecuaciones generales del movimiento de los rios á la resolucion de problemas análogos á los que se ofrecen en los canales.

Primer problema. Unas veces se dan conocidas las áreas y perímetros bañados de una série de secciones trasversales, las distancias entre estas, y el caudal de la corriente, y se buscan las pendientes de la superficie. Si ademas de esto son conocidas las figuras de las secciones ó la profundidad del agua en uno de los puntos de cada una, se pueden deducir de las pendientes de superficie las del fondo, y se completará asi la determinacion de la figura del álveo.

Sean por ejemplo los perfiles trasversales A, B, C, D, E, fig. 34, de un rio cuyo caudal por segundo es $Q=1803$ pies cúbicos. En la siguiente tabla se indican: en la primera coluna las distancias Δs entre las secciones; en la segunda los valores del perímetro bañado de cada una; en la tercera las áreas comprendidas entre el fondo y la superficie del agua; en la cuarta la velocidad media de cada una, deducida del caudal y de la área por la ecuacion $y=\frac{Q}{\omega}$.

Para hallar ahora los valores sucesivos de Δz correspondientes á cada seccion por la primera ecuacion

$$\Delta z=\left[\frac{c}{\omega}\left(Av+Bv^2\right)+\frac{c'}{\omega'}\left(Av'+Bv'^2\right)\right]\frac{\Delta s}{2}+C\Delta v^2$$

escribiremos en la quinta coluna los valores de $Av+Bv^2$, poniendo por A y B los números 0,000024265 y 0,000101852 que segun la nota del núm. 127 tienen cuando es el pie la unidad de medida, y por v el correspondiente de la co-

	1.ª Δs Pies.	2.ª c Pies.	3.ª ω Pies cuad.os	4.ª v Pies.	5.ª $Av+Bv^2$	6.ª $\frac{c}{\omega}(Av+Bv^2)$	7.ª $\frac{c}{\omega}(Av+Bv^2)\Delta s$ Pies.	8.ª Cv^2	9.ª $C\Delta v^2$ Pies.	10.ª Δz Pies.	11.ª z Pies.
A		380,50	845,75	2,133	0,000514	0,000230		0,0814			0,0000
	360						0,1640		0,1497	0,3137	
B		388	502,50	3,588	0,001398	0,000681		0,2311			0,3137
	360						0,3969		0,0626	0,4595	
C		384,75	445,75	4,045	0,001765	0,001524		0,2937			0,7732
	180						0,1836		−0,1631	0,0205	
D		340	531	2,697	0,000806	0,000516		0,1306			0,7937
	234						0,0825		−0,0465	0,0360	
E		297,50	833	2,165	0,000530	0,000189		0,0841			0,8297
	1134										

luna anterior; en la sexta los productos de estos valores por $\frac{c}{\omega}$ ó la cantidad $\frac{c}{\omega}$ $(Av+Bv^2)$. Para formar la sétima ó el primer término del segundo miembro, se tomará la mitad de la suma de cada dos números consecutivos $\frac{c}{\omega}$ $(Av+Bv^2)$, y este medio aritmético es el que se multiplicará por Δs anotando el producto en dicha coluna. En la octava se escribirán los valores Cv^2, poniendo por v el número de la cuarta coluna y por C el número constante $\frac{1,26}{2g} = \frac{1,26}{70,19}$ (*) para poner en la novena la diferencia de cada dos valores consecutivos ó el último término $C\Delta v^2$ de la ecuacion. Estos valores se sumarán ó restarán, segun su signo, de los correspondientes de la sétima coluna, y los resultados escritos en la décima ofrecerán las pendientes absolutas parciales Δz de la superficie de la corriente. En la undécima se pondrán las pendientes totales ó las ordenadas del hilo de la corriente contadas desde la horizontal que pasa por la seccion A hasta la seccion que se considere, y está escrita en la primera coluna.

Resulta así la curva ó por lo menos el perímetro $a'b'c'd'e'$, fig. 35, inscrito á la curva que termina el perfil longitudinal y tambien la pendiente total de superficie entre las secciones extremas que viene á ser de $0^p,8297$ ó de 9,96 pulgadas.

En ordenando bien los cálculos y haciendo uso de los logaritmos se hallará que el trabajo no es tan largo ni tan complicado como á primera vista aparece.

(*) E[illegible]tmo de este número es 8,25408. Cuando la pulgada es la unid[illegible] C=7,17490.

159. Cuanto mas pequeños sean los intérvalos entre las secciones, mas se acercará el perímetro calculado á la curva que efectivamente describirá el hilo del agua. Conviene pues para mayor exactitud construir muchos perfiles intermedios entre las secciones extremas, tomándolos con preferencia en aquellos puntos de la corriente en que parezcan diferir mas unos de otros; y aun en el caso de que no sea dable ejecutar estas operaciones, se conseguirá alguna mayor aproximacion intercalando, entre cada dos secciones consecutivas, otras cuyas areas y perímetros bañados sean medios aritméticos entre los respectivos de aquellas, y que se conciban situadas en los puntos intermedios correspondientes.

160. Si para calcular la pendiente total, solamente hubiéramos hecho uso de las secciones extremas A y E, lo que equivaldria á suponer regularizado el álveo de suerte que su área y perímetro decreciesen uniformemente desde A hasta E, dicha pendiente seria segun la fórmula $Ee''=0^p,4751$ ó los $\frac{57}{100}$ de la hallada antes.

Este resultado es una muestra del efecto que en la pendiente de un rio producen los desmontes ó terraplenes hechos en su álveo con la mira de regularizarle.

161. Si se supusiese constante la seccion de la corriente en todo el intervalo de A á E, y con una área y un perímetro que fuesen los correspondientes á la seccion media (*), la pendiente total calculada sería $Ee'''=0^p,605$ ó unos $\frac{3}{4}$ de la que realmente tiene lugar.

(*) Calculado el promedio entre los perímetros y las áreas atendiendo á los intervalos de las secciones, resulta próximamente de 365^p para el primero y de 626^{pp} para el segundo.

162. Conocidas por la sonda las profundidades h de las secciones en los puntos a, b, c, d, e, se puede construir el perfil del fondo de la corriente por medio de la segunda ecuacion

$$i \Delta s = \Delta z + \Delta h$$

segun está hecho en la siguiente tabla y descrito en la figura 35 (*).

SECCIONES.	Δs	h	Δh	Δz	$i\Delta s$	ORDENADAS. TOTALES.
A		3,16				3,16
	360		—0,75	0,31	—0,44	
B		2,41				2,72
	360		—0,90	0,46	—0,44	
C		1,51				2,28
	180		0,14	0,02	0,16	
D		1,65				2,44
	234		1,54	0,04	1,58	
E		3,17				4,02

En el supuesto del núm. 160 la línea descrita por el hilo del agua seria la $a'e''$; $i\Delta s = NE'' = 0^p,545$ resultando para la línea del fondo la aE''.

En el caso del núm. 161 y admitiendo que la figura del lecho sea rectangular, resulta (núm. 143) para la anchura $a = 361^p,50$ y para la altura $h = 1^p,75$. Siendo ae''' el perfil de la superficie, deberá ser el del fondo la $A'E'$ paralela á ella.

163. Segundo problema. En la mayor parte de los casos que ocurren en la práctica, las cantidades desconocidas son Δz y Δh. La pendiente i del fondo, la figura ó tamaño de las secciones y el caudal Q son dadas, ó inmediatamente medidas.

(*) La escala horizontal de esta figura es de $\frac{1}{4000}$, y la vertical de $\frac{1}{40}$.

Sea por ejemplo un canal rectangular cuyo perfil longitudinal de fondo sea una recta horizontal, por donde debe correr un caudal de 40^{ppp} por segundo. La anchura del canal es de 5^p. Partiendo hácia arriba desde una seccion donde la altura del agua es de $1^p,50$, se pide la altura que tendrá á diversas distancias Δs, $\Delta s'$.....

Contaremos las ordenadas z del hilo del agua desde su extremo inferior aguas arriba; y siendo $i = 0$, la segunda ecuacion general da $\Delta z = \Delta h$. Para la resolucion del problema es ademas indiferente que se determine Δh por medio de Δs, ó al reves Δs por medio de Δh, es decir, á qué distancias Δs, $\Delta s'$... tendrán las alturas del agua valores dados $h + \Delta h$, $h' + \Delta h'$..... Siendo menos embarazoso este último procedimiento, escribiremos la primera ecuacion general bajo la forma

$$\Delta s = \frac{\Delta h - C \Delta v^2}{\frac{c}{\omega}(Av + Bv^2)},$$

y haciendo $\Delta h = 0^p,25$ desde cada seccion á la siguiente formaremos la tabla adjunta, por cuyo medio se construirá la curva del hilo del agua y se sabrán las alturas de esta en los diferentes puntos del canal. La cuestion presente es una de las resueltas por Belanger, primer descubridor de esta interesante teoría.

h Pies.	Δh Pies.	c Pies.	ω PP.	v Pies.	Cv^2 Pies.	$C\Delta v^2$ Pies.	$\Delta h - C\Delta v^2$ Pies.	$Av+Bv^2$	$\frac{c}{\omega}(Av+Bv^2)$	Promedios de id.	Δs Pies.
1,50		8	7,50	5,333	0,511			0,003026	0,003228		
	0,25					—0,136	0,386			0,0027015	142,94
1,75		8,50	8,75	4,571	0,375			0,002259	0,002175		
	0,25					—0,088	0,338			0,0018645	181,28
2		9	10	4	0,287			0,001727	0,001554		
	0,25					—0,060	0,310			0,0013565	228,53
2,25		9,50	11,25	3,555	0,227			0,001373	0,001159		
	0,25					—0,043	0,293			0,0010280	285,02
2,50		10	12,50	3,200	0,184			0,001121	0,000897		
	0,25					—0,032	0,282			0,0008045	350,53
2,75		10,50	13,75	2,909	0,152			0,000933	0,000712		
	0,25					—0,024	0,274			0,0006455	424,48
3		11	15	2,667	0,128			0,000789	0,000579		
											1612,78

164. En general cualquiera que sea la figura de la seccion trasversal con tal que se pueda construir el perfil de cada una y valuar su área y su perímetro bañado, la ecuacion

$$i\Delta s-\Delta h=\left[\frac{c}{\omega}(Av+Bv^2)+\frac{c'}{\omega'}(Av'+Bv'^2)\right]\frac{\Delta s}{2}+C\Delta v^2$$

da siempre los medios de calcular el valor de Δh desde cada seccion á la inmediata. Para esto se supone á Δh un valor prudencial, y se calculan los valores que de este supuesto resultan á las cantidades c', ω', v' correspondientes á la segunda seccion. Se sustituyen todos en la anterior ecuacion para examinar si queda satisfecha. Si no resulta idéntica, se aumenta ó disminuye el valor atribuido á Δh, y calculadas nuevamente c', ω', v' se vuelven á sustituir en la misma ecuacion, repitiendo estos tanteos y comprobaciones hasta conseguir que el segundo miembro se iguale con el primero. Estos cálculos son largos y penosos; pero la importancia de los problemas á que se aplican es demasiado grande para que se esquiven por el ingeniero al tratar de averiguar con antelacion los efectos que en la pendiente de superficie de un rio han de producir las obras que en su lecho piense ejecutar, ó inversamente las construcciones que debe establecer para que resulten los efectos que desea.

165. Se abreviará mucho el trabajo sin sacrificar notablemente la exactitud, escribiendo la anterior ecuacion bajo la forma

$$i\Delta s-\Delta h=\Delta s\left(AQ\frac{c}{\omega^2}+BQ^2\frac{c}{\omega^3}\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}\Delta s\Delta.\left(AQ\frac{c}{\omega^2}+BQ^2\frac{c}{\omega^3}\right)+CQ^2\Delta\frac{1}{\omega^2};$$

y si se considera que en los problemas de las corrientes son

bastante pequeñas de una seccion á la inmediata las diferencias de c y ω para que puedan despreciarse sus cuadrados, ó para que sea permitido tratarlas como diferenciales, se trasforma en

$$i\Delta s-\Delta h=\Delta s\left[\frac{c}{\omega}(Av+Bv^2)+\frac{\Delta c}{2\omega}(Av+Bv^2)-\right.$$
$$\left.-\frac{c\Delta\omega}{\omega^2}(Av+\tfrac{3}{2}Bv^2)\right]-2Cv^2\frac{\Delta\omega}{\omega},$$

ó en

$$\Delta s\left[i-\frac{c+\frac{1}{2}\Delta c}{\omega}(Av+Bv^2)+\frac{c\Delta\omega}{\omega^2}(Av+\tfrac{3}{2}Bv^2)\right]-$$
$$-\Delta h+2Cv^2\frac{\Delta\omega}{\omega}=0.$$

En ella se sustituirán los valores de Δc y $\Delta\omega$ que se deduzcan del valor supuesto á Δh para la segunda seccion y de su figura, repitiendo los tanteos hasta que quede satisfecha. Se pasará despues por operaciones semejantes de la segunda seccion á la tercera, partiendo de los valores de c, ω, v que se hayan hallado para aquella, y asi hasta la última seccion.

166. Todavía se conseguirá mayor abreviacion sin mucho perjuicio de la exactitud observando que la $\Delta\omega$ puede descomponerse en dos partes; una que depende de la figura de la segunda seccion, pero suponiendo que se conserva en ella la misma altura h que en la primera, esta porcion que representaremos por $\Delta'\omega$ puede medirse y valuarse directamente. La otra que depende exclusivamente de la variacion de h equivale con corta diferencia á un rectángulo cuya base sea la anchura superior de la segunda seccion y la altura Δh, y puede representarse por $a'\Delta h$, designando por a' dicha anchura superior. En cuanto á Δc no hay inconveniente en suponerla independiente de la variacion de h y

valuarla bajo el supuesto de que esta profundidad sea la misma en las dos secciones, porque en efecto las anchuras de superficie de las dos secciones son las que tienen la principal influencia en esta cantidad. La designaremos por $\Delta'c$. En virtud de estas consideraciones la ecuacion anterior se trasforma en

$$i\Delta s-\Delta h=\Delta s\left[\frac{c}{\omega}(Av+Bv^2)+\frac{\Delta'c}{2\omega}(Av+Bv^2)-\right.$$
$$\left.-\frac{c\Delta'\omega}{\omega^2}(Av+\tfrac{3}{2}Bv^2)\right]$$
$$-\Delta h\,\Delta s\frac{a'c}{\omega^2}(Av+\tfrac{3}{2}Bv^2)-2Cv^2\frac{\Delta'\omega}{\omega}-2Cv^2\frac{a'}{\omega}\Delta h,$$

que da

$$\Delta h=\frac{\Delta s\left[i-\frac{c+\frac{1}{2}\Delta'c}{\omega}(Av+Bv^2)+\frac{c\Delta'\omega}{\omega^2}(Av+\frac{3}{2}Bv^2)\right]+2Cv^2\frac{\Delta'\omega}{\omega}}{1-\Delta s\frac{a'c}{\omega^2}(Av+\frac{3}{2}Bv^2)-2Cv^2\frac{a'}{\omega}}:$$

obtenida asi directamente y sin ningun tanteo la Δh, se tendrá la altura $h+\Delta h$ de la segunda seccion, y se podrán calcular la área ω, el perímetro c y la velocidad v que á ella pertenecen para pasar por operaciones semejantes de esta á la tercera, y del mismo modo hasta la última.

167. Cuando las secciones son rectangulares, de anchura y altura variables, se tiene

$$\Delta'c=\Delta a,\quad \Delta'\omega=h\Delta a,$$

y menospreciando la fraccion $\frac{h}{a\omega}$ y sus homólogas por ser pequeña la profundidad de los rios respecto de su anchura, la fórmula anterior se convierte en

$$\Delta h=\frac{\Delta s\left[i-\frac{c}{\omega}(Av+Bv^2)-\frac{\Delta a}{\omega}(\frac{3}{2}Av+2Bv^2)\right]+2Cv^2\frac{\Delta a}{a}}{1-\frac{\Delta s}{h^2}(Av+\frac{3}{2}Bv^2)-\frac{2Cv^2}{h}}.$$

168. En el caso de que la anchura de las secciones se mantenga constante, este valor es

$$\triangle h = \frac{\triangle s\left(i - \frac{c}{\omega}(Av + Bv^2)\right)}{1 - \frac{\triangle s}{h^2}(Av + \frac{3}{2}Bv^2) - \frac{2Cv^2}{h}}.$$

169. Una vez determinada $\triangle h$ por estas fórmulas para cada una de las secciones, se buscará la correspondiente $\triangle z$ de la superficie por la ecuacion

$$\triangle z = i\triangle s - \triangle h;$$

y repitiendo la operacion en cada intervalo se conseguirá definir completamente la curva de la superficie de la corriente en toda la extension que se necesite.

Pero se debe observar que no dando estas ecuaciones sino la pendiente ó la diferencia de nivel de los diversos puntos de esta curva, es necesario que de antemano ó por las condiciones del problema se determine la posicion absoluta de uno de estos puntos para que quede fijada la de dicha superficie. Esta determinacion en la mayor parte de los casos que ocurren en las aplicaciones va á ser el asunto de los números siguientes.

De los remansos en los rios.

170. Cuando en un rio se construye una presa que abrace toda su anchura, ya sea que quede sumergida enteramente, ya se levante por encima del nivel ordinario de las aguas, ya se guarnezca de compuertas por cuyas bocas se dé paso á la corriente, ó cuando se estrecha esta por lenguas ó diques que solo ocupen una parte de la anchura, ó bien por los pilares de un puente, el fluido se ve obligado á levantarse aguas arriba de estas construcciones originándose lo que se llama una *tabla* ó *remanso*. El problema anterior y los que vamos á resolver tienen por objeto la determinacion de la curva que describe el hilo del agua en estos remansos; pero antes de esto, conforme á la indicacion hecha en el número anterior, conviene determinar su altura en las inmediaciones de la construccion que los causa, con lo cual se tendrá uno de los puntos de dicha curva.

Supongamos en primer lugar que al través de un rio se establezca un dique guarnecido de una compuerta que le obliga á pasar por una boca *cd*, fig. 36; para que esto se verifique, necesario es que el fluido adquiera en esta seccion mayor velocidad que la ordinaria del rio; y el excedente de esta velocidad no puede ser producido sino por un aumento de carga ó de altura de agua mas arriba de esta seccion; de suerte que este exceso de altura vendrá á ser representado por la diferencia entre las alturas debidas á las velocidades que tienen lugar antes y despues de la construccion del dique en el paraje *ab*. Llamando

a la anchura media del rio;
h la profundidad *ab* en su estado ordinario;
v la velocidad media ordinaria de la corriente;
v' la velocidad en la seccion *cd* de la boca;
a', b' la anchura y altura de esta seccion, supuesta rectangular;
m el coeficiente de contraccion que tiene lugar á la entrada del fluido en la misma seccion;
x la altura *aa'* del remanso que se origina;

la velocidad v en la seccion ordinaria *ab* del rio era $v = \frac{Q}{ah}$;

en la seccion de la boca de la compuerta es $v' = \frac{Q}{ma'b'}$ ó bien

$v'=v\frac{ah}{ma'b'}$. Las alturas debidas á estas velocidades serán respectivamente $\frac{v^2}{2g}$ y $\frac{v^2}{2g}\cdot\frac{a^2h^2}{m^2a'^2b'^2}$; por consecuencia la aa' del remanso será

$$x=\frac{v^2}{2g}\left(\frac{a^2h^2}{m^2a'^2b'^2}-1\right).$$

171. Consideremos en segundo lugar el caso en que la parte superior del dique ó presa, fig. 37, queda mas baja que la superficie de la corriente, y que ademas se angosta su seccion por ambas márgenes ó por una de ellas. Se mirará el orificio cd de salida como compuesto de dos partes; una ac comprendida entre el nivel del rio y el umbral del dique por la cual sale el fluido como por un orificio; la otra ad por donde sale al aire libre como por un vertedor rectangular. Conservando las anteriores notaciones y llamando

h' la altura ac del nivel ordinario del rio sobre el umbral de la presa;

m' el coeficiente de contraccion en la porcion superior, el gasto por la parte ac del orificio será segun el núm. 44

$$ma'h'\sqrt{2g}\sqrt{\left(x+\frac{v^2}{2g}\right)};$$

el que tiene lugar por la parte superior ad es segun el núm. 60

$$\tfrac{2}{3}m'a'x\sqrt{2g}\sqrt{\left(x+\frac{v^2}{2g}\right)};$$

y la suma de los dos igualada á Q, ó

$$Q=a'(mh'+\tfrac{2}{3}m'x)\sqrt{2g}\sqrt{\left(x+\frac{v^2}{2g}\right)}$$

dará la ecuacion de donde se puede sacar la altura x que se busca.

172. Si en tercer lugar la construccion no levanta el fondo, sino que solo angosta lateralmente el álveo como sucede las mas veces en los puentes, fig. 38, bastará hacer en la ecuacion anterior $h'=h$, y se tendrá

$$Q=a'(mh+\tfrac{2}{3}m'x)\sqrt{2g}\sqrt{\left(x+\frac{v^2}{2g}\right)}.$$

Esta fórmula se aplica al caso en que se estrecha el rio por los pilares de un puente: a' es la suma de los claros de los arcos. Se hará $m'=m$, y en la ecuacion

$$Q=ma'(h+\tfrac{2}{3}x)\sqrt{2g}\sqrt{\left(x+\frac{v^2}{2g}\right)}$$

se atribuirá á m el valor 0,95 cuando el pilar está terminado por un tajamar semicircular, por un ángulo agudo ó por un ángulo curvilíneo; el valor 0,90 cuando le termina un ángulo obtuso; 0,85 cuando no hay tajamares y son grandes los arcos; y 0,70 en los casos mas desventajosos, esto es, cuando sobre ser los arcos pequeños estan sus arranques dentro del agua.

Sirva de ejemplo el puente de Minden sobre el rio Weser, en donde la anchura media del rio era $a=7782^p$, la profundidad media $h=231^p$, el caudal $Q=105281000^{ppp}$ y la suma de las luces de los arcos $a'=4135^p$.

La velocidad del rio mas arriba del remanso resulta $v=\frac{Q}{ah}=58^p,57$. Habiéndose hecho obras por delante de los pilares para detener los hielos, y estorbando estas el libre paso del agua tanto como si no hubiese tajamares angulares, haremos $m=0,85$. Sustituidos estos valores en la última ecuacion, se convierte en

$$x^3+697\,x^2+122885\,x-1907798=0;$$

haciendo $x=20$ resulta. . $+828700=0$
$x=16$. . . . . $+236800=0$
$x=14$. . . . . $-50900=0$
$x=14{,}40$. . . . . . . $+6300=0$
$x=14{,}35$. . . . . . . $-900=0$

el valor x de la altura del remanso es próximamente

$$x = 14^p{,}36\,;$$

el observado directamente por Funck era $x = 16^p{,}49$.

Daubuisson resuelve este problema valiéndose de la misma consideracion del núm. 170 como sigue:

Siendo las velocidades en la seccion en su estado ordinario y despues de la construccion

$$\frac{Q}{ah} \quad \text{y} \quad \frac{Q}{ma'(h+x)}$$

ó

$$v \quad \text{y} \quad v\,\frac{ah}{ma'(h+x)},$$

la altura del remanso, que es la diferencia entre las alturas debidas á estas velocidades, será

$$x = \frac{v^2}{2g}\cdot\frac{a^2h^2}{m^2a'^2(h+x)^2} - \frac{v^2}{2g},$$

ó

$$x = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{a^2h^2}{m^2a'^2(h+x)^2} - 1\right).$$

Se hallará un primer valor aproximado de x prescindiendo de la fraccion $\frac{h^2}{(h+x)^2}$; se sustituirá en esta ecuacion para buscar por el mismo camino un segundo valor que será mas aproximado, y asi en adelante hasta obtener dos sucesivos que difieran uno de otro tan poco como se desee. Esta fórmula, aunque no tan exacta como la anterior, es mas sencilla y conduce mas pronto al resultado final.

Aplicándola al ejemplo propuesto se halla $x = 13^p{,}76$.

173. Debe notarse una circunstancia que ocurre con motivo del salto ocasionado por los remansos: en virtud del exceso de caida del agua, su velocidad crece en los primeros instantes ó al pasar por debajo de los arcos como en el movimiento acelerado; para esto y para que ademas se conserve como siempre la permanencia del movimiento expresada por la ecuacion $Q = \omega v$, es necesario que la profundidad se disminuya, ó que en este paraje se acerque la superficie al fondo segun indica la figura. De aqui los remolinos que en las crecidas se notan siempre cerca de los tajamares inferiores; la violencia con que el fondo es acometido por la corriente; lo expuestos en fin que alli se hallan los pilares á las socavaciones. El ingeniero debe precaverse contra estos efectos, y tambien aminorarlos aumentando el claro de los arcos en las construcciones de esta clase que haya de proyectar ó dirigir.

174. Supongamos en cuarto y último lugar que la cima de la presa esté mas alta que la superficie del rio. Saltando entonces el agua por encima de ella y saliendo del mismo modo que por un vertedor rectangular, se puede aplicar la fórmula del núm. 61, ó bien se hará $h' = 0$ en la ecuacion del núm. 171 para tener

$$Q = \tfrac{2}{3}\,m'a'x\sqrt{2g}.\sqrt{\left(x + \frac{v^2}{2g}\right)},$$

y despejar en esta la altura x del remanso sobre el umbral de la presa. Una simple adicion de esta altura con la del umbral sobre el nivel del rio antes de la construccion, dará la altura total del remanso.

175. Una vez obtenido un punto de la superficie del remanso por medio de las reglas anteriores, ó sabida la construccion que debe ejecutarse para que la superficie del

agua se eleve en sus inmediaciones á una altura dada sobre su nivel natural, las reglas expuestas en los números 160 y siguientes enseñan á determinar la posicion absoluta de los demas puntos de la superficie aguas-arriba, y por consiguiente la profundidad que tendrá la corriente á una distancia dada. Se percibe desde luego la suma importancia de este problema en los proyectos cuyo objeto es hacer los rios navegables ó flotables, considerando que si se divide su longitud en diversos tramos ó tablas por medio de presas que disminuyan la seccion de la corriente por alguno de los arbitrios anteriormente expresados, en sabiendo la altura de agua que corresponde á la espalda de cada una por consecuencia de la que se causó en el frente de la presa inmediata inferior, ó inversamente en determinando la altura de cada remanso por la condicion de que la profundidad del agua á la espalda de la presa inmediata superior sea la que basta para la navegacion ó para la flotacion, cada uno de los tramos, y por consiguiente toda la extension de rio que abracen, será completamente navegable ó flotable, con tal empero que las márgenes esten suficientemente elevadas para precaver las inundaciones. El ejemplo siguiente es una aplicacion instructiva de este género de cuestiones.

176. TERCER PROBLEMA. Con el objeto de hacer navegable un tramo de rio se quiere construir una presa que le atraviese en su extremo inferior P, fig. 39, y se desea saber á qué altura debe en este levantarse el nivel del agua para que en el extremo superior M resulte un aumento de profundidad determinado.

La longitud del tramo es de 72500 pies contando con los recodos. No habiéndose construido perfiles trasversales de la corriente, ni longitudinales de su fondo, se computa

NUMEROS CONSTANTES.

log. Q=3,86415 ; log. A=5,38497 ; log. B=6,00797 ; log. C=8,25408 ; log. Δs=3,86034.

Número de las secciones	Δs	Δh	h	c	ω	v	$Av+Bv^2$	$\frac{c}{\omega}(Av+Bv^2)\frac{\Delta s}{2}$	$\frac{c}{\omega}(Av+Bv^2)\Delta s$	Cv^2	ΔCv^2	Δz	z	$i\Delta s$	Ordenadas del fondo.
	Pies.	P	P	P	PP	P						P	P	P	P
1.ª			4,10	633,20	2562,50	2,854	0,000900	0,806	....	0,146	....	.....	0,000	....	4,10
	7250	0,90	....	......	....	.....	....	....	1,259	.....	—0,048	1,211	.....	2,111	
2.ª	.....	......	5,00	635,00	3125,00	2,341	0,000615	0,453	....	0,098	....	.....	1,211	....	6,211
	7250	1,00	....	......	....	.....	....	....	0,721	.....	—0,030	0,691	.....	1,691	
3.ª	.....	......	6,00	637,00	3750,00	1,950	0,000435	0,268	....	0,068	....	.....	1,902	....	7,902
	7250	1,00	....	......	....	.....	....	....	0,441	.....	—0,018	0,423	.....	1,423	
4.ª	.....	......	7,00	639,00	4375,00	1,672	0,000326	0,173	....	0,050	....	.....	2,325	....	9,325
	7250	1,00	....	......	....	.....	....	....	0,291	.....	—0,012	0,279	.....	1,279	
5.ª	.....	......	8,00	641,00	5000,00	1,463	0,000253	0,118	....	0,038	....	.....	2,604	....	10,604
	7250	0,00	....	......	....	.....	....	....	0,236	.....	0,000	0,236	.....	0,236	
6.ª	.....	......	8,00	641,00	5000,00	1,463	0,000253	0,118	....	0,038	....	.....	2,840	....	10,840
	7250	—1,00	....	......	....	.....	....	....	0,291	.....	+0,012	0,303	.....	—0,697	
7.ª	.....	......	7,00	639,00	4375,00	1,672	0,000326	0,173	....	0,050	....	.....	3,143	....	10,143
	7250	—1,00	....	......	....	.....	....	....	0,441	.....	+0,018	0,459	.....	—0,541	
8.ª	.....	......	6,00	637,00	3750,00	1,950	0,000435	0,268	....	0,068	....	.....	3,602	....	9,602
	7250	—0,50	....	......	....	.....	....	....	0,612	.....	+0,013	0,625	.....	0,125	
9.ª	.....	......	5,50	636,00	3437,50	2,128	0,000513	0,344	....	0,081	....	.....	4,227	....	9,727
	7250	—0,20	....	......	....	.....	....	....	0,727	.....	+0,006	0,733	.....	0,533	
10.ª	.....	......	5,30	635,60	3312,50	2,208	0,000550	0,383	....	0,087	....	.....	4,960	....	10,260
	7250	—0,53	....	......	....	.....	....	....	0,902	.....	+0,021	0,923	.....	0,393	
11.ª	.....	......	4,77	634,54	2981,30	2,453	0,000673	0,519	....	0,108	....	.....	5,883	....	10,653
												5,88			

que la seccion del rio es un rectángulo de 625 pies de anchura constante. El caudal del rio es de 7314^{ppp} por segundo. La pendiente total del fondo, ó la diferencia de nivel entre sus extremos M, P, es de $6^p,55$. Se sabe tambien que la altura menor del agua es $Mm = 4^p,10$ en el punto superior M, y $Pp = 4^p,77$ en el inferior P. Lo que se pretende es levantar $3^p,20$ mas el nivel del rio en M, y para que esto resulte, cuanto se le debe hacer subir en P.

Si se conociera el perfil longitudinal del fondo y la forma y dimensiones de las secciones trasversales intermedias, bastaria, partiendo del punto m', sustituir en la ecuacion general en lugar de las letras c, ω, &c., sus valores relativos á las diferentes secciones para tener los puntos sucesivos de la curva $m'p'$, y por último este punto p' ó la altura pp' que se busca. Pero á falta de estos datos, que solo pueden obtenerse por mediciones directas, será necesario calcular de antemano un lecho hipotético que pueda remplazar al lecho efectivo en las operaciones que tengan que hacerse, de suerte que sea capaz de dar paso al mismo caudal; que las profundidades del agua en los extremos M, P sean las mismas Mm, Pp que en el cauce real, y por último que las secciones sean rectangulares de la anchura constante de 625^p y la pendiente total del fondo tambien de $6^p,55$.

177. Este problema preliminar es indeterminado, segun se conoce á primera vista. Asi, dividiendo la distancia MP en diez intervalos iguales de á 7250^p, podremos disponer prudencialmente de la altura de todas las secciones menos de la penúltima, cuya magnitud se determinará por tanteo, de tal suerte, que combinada con la anterior y con la última, dé para la ordenada final la cantidad $5^p,88$, que segun los datos debe resultar. En la tabla adjunta estan ordenados los cálculos, segun se hizo en el primer problema, núm. 158.

178. Constituido el perfil del fondo por medio de las ordenadas que constan en la última columna de la misma tabla (*), y conocido el valor de $i\triangle s$ correspondiente á cada intervalo, procedamos á calcular las alturas de las secciones en los diversos puntos, y á deducir las ordenadas de la superficie $m'p'$ de la corriente.

Siendo la seccion un rectángulo de anchura constante, nos valdremos para esto de la ecuacion del núm. 168

$$\triangle h = \frac{i\triangle s - \frac{c}{\omega}(Av + Bv^2)\triangle s}{1 - \frac{\triangle s}{h^2}(Av + \frac{3}{2}Bv^2) - \frac{2}{h}Cv^2}$$

y ordenaremos los resultados del cálculo en una tabla como la de la página siguiente. La 1.ª columna contiene los nombres de las secciones: la 2.ª las distancias de unas á otras: la 3.ª las pendientes del fondo desde cada seccion á la inmediata, calculadas en la tabla del número anterior: en la 4.ª aparecen las profundidades del rio en las diversas secciones, á saber, en la primera el valor de h es la profundidad $4^p,10$ que allí tiene el rio mas la altura $3^p,20$ á que se quieren elevar sus aguas en aquel punto; en la segunda seccion la profundidad es $h + \triangle h$, esto es, la anterior mas la diferencia $1^p,944$, calculada por medio de la última fórmula y escrita en la 11.ª columna, conforme á los valores de c, ω, v, &c. puestos en las columnas 4.ª hasta la 10.ª Los valores de $\triangle z$ estan sacados

(*) En la fig. 39, que representa gráficamente la solucion de todas las partes de este problema, la escala es de $\frac{1}{300000}$ para las distancias horizontales, y de $\frac{1}{100}$ para las verticales.

NUMEROS CONSTANTES.

log. $Q = 3,86415$; log. $A = 5,38497$; log. $B = 6,00797$; log. $2C = 8,55511$; log. $\triangle s = 3,86034$

1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª	11.ª	12.ª	13.ª
Números de las secciones.	$\triangle s$	$i\triangle s$	h	c	ω	v	$\frac{c}{\omega}(Av+Bv^2)\triangle s$	$\frac{\triangle s}{h^2}(Av+\frac{3}{2}Bv^2)$	$\frac{2}{h}Cv^2$	$\triangle h$	$\triangle z$	z
	Pies.	P	P	P	PP	P				P	P	P
1.ª			7,300	639,60	4562,50	1,603	0,3055	0,0587	0,0126			0,000
	7250	2,111								1,944	0,167	
2.ª			9,244	643,49	5777,50	1,266	0,1566	0,0234	0,0062			0,167
	7250	1,691								1,581	0,110	
3.ª			10,825	646,65	6766,70	1,081	0,1006	0,0127	0,0039			0,277
	7250	1,423								1,344	0,079	
4.ª			12,169	649,13	7605,60	0,962	0,0727	0,0081	0,0027			0,356
	7250	1,279								1,219	0,060	
5.ª			13,388	651,78	8367,60	0,874	0,0560	0,0056	0,0020			0,416
	7250	0,236								0,181	0,055	
6.ª			13,569	652,14	8480,70	0,862	0,0539	0,0053	0,0020			0,471
	7250	—0,697								—0,756	0,059	
7.ª			12,813	650,63	8008,20	0,913	0,0632	0,0066	0,0026			0,530
	7250	—0,541								—0,609	0,068	
8.ª			12,204	649,41	7627,50	0,959	0,0599	0,0065	0,0027			0,598
	7250	0,125								0,066	0,059	
9.ª			12,270	649,54	7660,00	0,955	0,0700	0,0077	0,0026			0,657
	7250	0,533								0,468	0,065	
10.ª			12,738	650,47	7961,30	0,919	0,0642	0,0068	0,0024			0,722
	7250	0,393								0,332	0,061	
11.ª			13,070									0,783

de $i\triangle s$ y de $\triangle h$ por la ecuacion $\triangle z = i\triangle s - \triangle h$. Para las demas secciones se han repetido los mismos cálculos, y resulta que en la última la altura que debe tener el agua es de 13^p07, es decir, $8^p,30$ mas que la actual del rio.

179. Suponiendo que para causar esta elevacion de las aguas se intente construir en P una presa guarnecida de compuertas segun se indicó en el núm. 170, es necesario completar la solucion del problema averiguando cuánto deben levantarse las compuertas, ó qué dimensiones deben darse á las bocas rectangulares abiertas en la presa cerca de su fondo, con la condicion de que resulte la altura $8^p,30$ de agua sobre el nivel actual del rio.

Siendo en la seccion P

$$v = 2,453 \quad ; \quad ah = 2981,30;$$

haciendo

$$x = 8,30 \quad ; \quad m = 0,625,$$

la ecuacion del número citado da

$$a'b' = \frac{ah}{m\sqrt{\left(1 + \frac{2gx}{v^2}\right)}} = 152^{pp},54$$

para la área de esta seccion ó suma de las áreas de las bocas. Si estas se ponen muy próximas, en vez de $m = 0,625$ se pondrá $m = 0,55$ conforme á la observacion del número 48.

180. Fundándose los cálculos del núm. 178 en las pendientes $i\triangle s$ del lecho hipotético del núm. 177, puede dudarse con fundamento de que sea exacto el valor $0^p,783$ hallado para la ordenada de la superficie del remanso en su extremo inferior. Se podrá confirmar ó desvanecer esta duda resolviendo de nuevo el mismo problema bajo el supuesto de ser el lecho de pendiente uniforme en toda la extension MP. Para que con la anchura constante de 625^p y la pendiente total de $6^p,55$ sea capaz de dar paso al caudal 7314^{ppp}, será necesario que la altura de este canal de régimen uniforme, deducida de la ecuacion del núm. 134

$$ia^3h^3 - AQcah - BQ^2c = 0,$$

que ahora es

$$h^3 - 0,010h^2 - 3,637h - 308,75 = 0,$$

sea

$$h = 6^p,925 \text{ que próximamente resulta.}$$

En vista de esto iremos formando la tabla de la página que sigue análoga á la anterior, escribiendo $6^p,925 + 3^p,20$ ó $10^p,125$ por primer valor de h.

181. Se ve por este cálculo que la pendiente total $0^p,645$ de la superficie del remanso es algo diferente de la 0^p783 hallada en el núm. 178. Partiendo de otro lecho hipotético se llegará á un nuevo valor; pero su diferencia estará comprendida entre límites muy inmediatos. Se puede observar tambien que la relacion entre las ordenadas totales difiere poco de la inversa de las profundidades medias en los dos lechos: la del supuesto en el núm. 178 es $11^p,78$; la del lecho de régimen uniforme es $13^p,02$; y buscando el cuarto término de la proporcion

$$11,78 : 13,02 :: 0,645 : x$$

se halla $x = 0^p,713$, que solo se diferencia en $0^p,07$ de la ordenada total directamente obtenida.

182. Lo mismo debe suceder en todos los casos en que los dos lechos sean capaces del mismo caudal, tengan la misma anchura, y en que las velocidades sean muy peque-

Número de las secciones.	Δs	$i\Delta s$	h	c	ω	v	$\frac{c}{\omega}(Av+Bv^2)\Delta s$	$\frac{\Delta s}{h^2}(Av+\frac{3}{2}Bv^2)$	$\frac{2}{h}Cv^2$	Δh	Δz	z
1ª			10,125	645,25	6328,40	1,156	0,121	0,0165	0,0047			0,000
	7250	0,655								0,545	0,110	
2ª			10,673	646,36	6670,70	1,096	0,105	0,0134	0,0040			0,110
	id.	id.								0,560	0,095	
3ª			11,233	647,47	7020,70	1,042	0,089	0,0108	0,0034			0,205
	id.	id.								0,574	0,081	
4ª			11,807	648,61	7379,50	0,991	0,079	0,0091	0,0030			0,286
	id.	id.								0,583	0,072	
5ª			12,390	649,78	7743,80	0,945	0,069	0,0075	0,0026			0,358
	id.	id.								0,592	0,063	
6ª			12,982	650,96	8113,80	0,901	0,061	0,0063	0,0022			0,421
	id.	id.								0,597	0,058	
7ª			13,579	652,16	8487,00	0,862	0,054	0,0053	0,0020			0,479
	id.	id.								0,606	0,049	
8ª			14,185	653,37	8865,70	0,825	0,048	0,0045	0,0017			0,528
	id.	id.								0,611	0,044	
9ª			14,796	654,59	9247,50	0,791	0,043	0,0038	0,0015			0,572
	id.	id.								0,617	0,038	
10ª			15,413	655,83	9633,20	0,759	0,038	0,0033	0,0013			0,610
	id.	id.								0,620	0,035	
11ª			16,033									0,645

ñas, como acontece en todos los problemas relativos á los rios, porque pudiendo entonces menospreciarse el término $C\Delta v^2$ de la ecuacion general, si designamos por Σ la suma de los términos de la misma forma correspondientes á los diversos intervalos, la relacion de las ordenadas totales será

$$\frac{z}{z'}=\frac{\Sigma\frac{c}{\omega}(Av+Bv^2)\Delta s}{\Sigma\frac{c'}{\omega'}(Av'+Bv'^2)\Delta s}:$$

en ella se puede suprimir Δs, que es la misma para ambos lechos: los factores $Av+Bv^2$ y $Av'+Bv'^2$, si bien diferentes en cada par de secciones correspondientes, sobre ser muy pequeños, diferirán en su suma muy poco uno de otro: las relaciones $\frac{c}{\omega}$ y $\frac{c'}{\omega'}$ serán tambien casi iguales á las $\frac{1}{h}$ y $\frac{1}{h'}$. Llamando pues H, H' las sumas de las profundidades h, h' de cada lecho, y n su número, la relacion anterior se convierte próximamente en

$$\frac{z}{z'}=\frac{\Sigma\frac{1}{h}}{\Sigma\frac{1}{h'}}=\frac{\Sigma h'}{\Sigma h}=\frac{H'}{H}=\frac{\frac{H'}{n}}{\frac{H}{n}},$$

que traducida expresa la propiedad enunciada.

183. En virtud de ella la solucion del problema propuesto en el núm. 176 se reduce á calcular como en el número 180 la ordenada total de la superficie del remanso, sustituyendo al lecho efectivo un lecho hipotético de régimen uniforme, capaz del mismo caudal y de una anchura constante é igual á la anchura media de la corriente

en el intervalo que se considera. Se podrá hallar el valor de esta anchura media dividiendo el volúmen de agua comprendido en dicho intervalo por la área de su perfil longitudinal. Comparando despues esta área con la área del perfil longitudinal hipotético, su relacion, que es la misma de las profundidades medias, será igual á la inversa de las ordenadas totales, y esta proporcion, en que son conocidos tres términos, dará la ordenada total del remanso en el lecho efectivo. Conforme á este precepto, si medido el perfil longitudinal efectivo se halla que la profundidad media del rio es de 12^p, la ordenada que en el ejemplo propuesto se busca será el cuarto término de la proporcion

$$12 : 13{,}02 :: 0{,}645 : z = 0^p{,}700;$$

y la altura del remanso sobre el fondo del rio en el extremo inferior

$$4^p{,}10 + 3^p{,}20 + 6^p{,}55 - 0^p70 = 13^p{,}15,$$

que produce $8^p{,}38$ sobre el nivel ordinario del rio en aquel punto y obliga á la construccion de una presa, que segun la disposicion que se le dé se arreglará por las fórmulas expuestas en los núms. 170, 171 ó 174.

184. Si en el problema propuesto, núm. 176, se diese la altura del remanso en el extremo inferior P y se quisiese saber la altura de este remanso á una distancia dada de 72500 pies, el mismo procedimiento seguido en el número 178, ó en los 180 y 183, serviria para determinarla, observando los signos que desde el principio del cálculo se den á las cantidades i, $\triangle c$, $\triangle \omega$ y $\triangle h$ para saber en cada seccion el que debe afectar á esta última, segun los que tengan las otras en la ecuacion general del núm. 166, ó en las que de esta se dedujeron en los núms. 167 y 168. Se llegará así á la altura $3^p{,}20$ del remanso sobre el nivel ordinario del rio en el extremo superior M.

185. Se podrá preguntar, porque importa mucho saberlo: ¿hasta qué distancia se propaga rio-arriba la influencia del remanso? ó en otros términos, ¿cuál es la longitud de este remanso desde su extremo inferior hasta que corta ó coincide con el nivel ordinario del rio?

La solucion práctica de esta cuestion se halla evidentemente en la ecuacion general; pues basta continuar el cálculo acabado de indicar en el número anterior hasta obtener una altura de agua que coincida ó difiera muy poco de la que en aquel punto tenga el rio en su estado natural.

En los rios caudalosos de mucha profundidad y de lenta corriente la distancia hasta la cual se propagan los remansos es muy considerable, bien que la diferencia de altura de las superficies de que se trata vaya menguando mas y mas rio-arriba.

Pero cuando la profundidad es pequeña, y grande la velocidad, no solo son de menos extension estos remansos, sino que afectan ademas una superficie convexa, y en su encuentro con la corriente natural se origina un escalon ó salto muy notable. Para dar razon de este hecho observaremos que si el agua del remanso estuviera en reposo y no sujeta á la accion de la corriente, su superficie seria plana y horizontal: en este supuesto designando por

h la altura aa', fig. 40, del remanso sobre el nivel del rio en la inmediacion de la obra que le causa,

i' la pendiente ordinaria media de la superficie del rio por unidad de longitud,

v su velocidad media en su estado natural,

la expresion $\frac{h}{i'}$ daria la longitud del remanso; pero por una

parte la superficie de los remansos no es plana ni completamente horizontal; por otra, obrando la accion de la corriente sobre el agua casi estancada del remanso, la empuja hácia adelante, tiende á disminuir su longitud, y aun ocasiona el escalon indicado en la figura. Atendidas estas consideraciones y las experiencias de Bidonne, que observó el primero este fenómeno, valúa Daubuisson la longitud $a'b$ de que se trata por la fórmula

$$\frac{h}{i'} - 0,03v^2,$$

siendo la pulgada española la unidad de medida.

Como en las orillas es menor la velocidad que en el medio de la corriente, la longitud del remanso es alli algo mayor. En las experiencias citadas resultó en efecto que esta longitud en las orillas era de 1,02 á 1,03 veces la observada en el hilo del agua.

Todas estas observaciones deben tenerse muy presentes ya se trate de precaver ó de ocasionar inundaciones en los terrenos de las riberas, cuando se construyen las obras que producen los remansos.

186. Cuarto problema. Conocido el caudal de una corriente y las áreas y perímetros bañados de sus secciones trasversales en su estado natural, determinar las modificaciones que en la pendiente de superficie producirán las construcciones que consistan en ensanchar ó angostar su lecho, ó tambien la excavacion de una canal de dimensiones dadas abierta en su fondo.

La solucion de este problema se halla comprendida en cuanto queda dicho en los números 164 y siguientes. Se calcula en primer lugar la pendiente del rio en su estado natural segun se hizo en el número 158. Despues, suponiendo que la superficie del agua pasa á una altura dada en una de las secciones, en la seccion mas baja por ejemplo, cuando ha sido alterada su magnitud y figura en virtud de las construcciones proyectadas, se valúa su área ω, su perímetro bañado c, la velocidad en este punto v, la distancia Δs á la seccion inmediata superior: en esta cuya figura es tambien conocida despues de la construccion, se mide igualmente su área, perímetro y anchura superior bajo la condicion de que la altura de la seccion sea la misma que la de la otra, y se valúan en consecuencia las cantidades $\Delta'\omega$, $\Delta'c$: obtenidos asi los elementos de la fórmula del número 166, se calculará Δh. Se tendrá pues la altura de la segunda seccion; y con ella y la tercera se ejecutarán las mismas operaciones acabadas de indicar para la primera y segunda, procediendo consecutivamente hasta la última. Los valores de Δz se tendrán al mismo tiempo que los de Δh, según se vió en el tercer problema. La pendiente de superficie y las profundidades de la corriente modificada quedan de este modo completamente definidas.

La única cantidad que ha sido fijada de antemano es la altura del agua en la seccion inferior. Cuando no se hacen construcciones nuevas mas abajo de dicha seccion, es natural suponer esta altura igual á la que en ella tiene el rio en su estado natural.

No presumiendo ocurra en la práctica ninguna dificultud en la aplicacion de estas reglas y de las fórmulas de los números 166 y 169, nos abstenemos de repetir ejemplos numéricos de este género de problemas.

CAPITULO VI.

DEL MOVIMIENTO DEL AGUA EN LAS CAÑERÍAS Ó ACUEDUCTOS CERRADOS.

187. Razones de economía y de conveniencia han dado motivo al uso de las cañerías. Cuando el agua de un acueducto descubierto tiene que atravesar un valle, suele ser bastante costosa la construccion de los pilares y arcos que le habrian de sostener para que no perdiese su nivel: cuando se introduce en una poblacion, estaria muy expuesta á perder su pureza y salubridad y obstruiria la comunicacion. En ambos casos en construyendo dos depósitos, uno á la entrada de la cañería y el otro á su salida, ya sea que este segundo depósito sea orígen de un nuevo tramo de acueducto ó canal, ó bien sirva de caja á las fuentes públicas, la cañería que los enlace puede sin inconveniente establecerse debajo del suelo siguiendo las inflexiones de la superficie, ó como mejor acomode, segun las circunstancias locales.

188. La ecuacion del movimiento del agua en las cañerías se establece por medio del mismo principio, y siguiendo el mismo camino que en las corrientes, número 120. Llamando

- s la longitud CAD, fig. 41, de acueducto comprendida entre los dos depósitos;
- ω la area de la seccion AB supuesta constante en toda la longitud de la cañería;
- c el contorno de AB, que actualmente está enteramente bañado por el agua;
- Ω la área de la seccion ab del depósito superior;
- Ω' la area de la seccion $a'b'$ del inferior, supuesta mas pequeña que la otra;

- h la distancia vertical cd de los dos depósitos, á quien llamaremos *carga del acueducto*;
- v la velocidad media constante del agua en el acueducto;
- z la distancia del centro de gravedad de la seccion AB al nivel MN del depósito superior;
- Q el gasto constante del acueducto por segundo;
- Π el peso de la unidad de volúmen del fluido;

considerando que las velocidades en ab y $a'b'$ son respectivamente $\frac{\omega}{\Omega}\,v$ y $\frac{\omega}{\Omega'}v$; y que el volúmen del fluido adelantado por un extremo y reemplazado por el otro en el tiempo dt es Qdt, su peso ΠQdt y su masa $\frac{\Pi}{g}Qdt$, la fuerza viva adquirida por la masa $abb'a'$ en dicho tiempo es conforme al núm. 122

$$\frac{\Pi Qdt}{g}\,v^2\left(\frac{\omega^2}{\Omega'^2}-\frac{\omega^2}{\Omega^2}\right).$$

La suma de las cantidades de accion impresas á la masa fluida durante el mismo tiempo por la gravedad en virtud de descender la altura h el centro de gravedad del volúmen adelantado ó desocupado Qdt, es segun el núm. 123

$$\Pi Qdt.h.$$

Las presiones extremas en ab y $a'b'$ debidas al peso de la atmósfera son próximamente iguales.

Se prescinde tambien de la contraccion que tiene lugar á la entrada y salida del agua en C y D porque la experiencia ha demostrado que es sumamente pequeña y despreciable.

Por último, la cantidad de accion debida á la resistencia de las paredes será como en el núm. 125

$$\frac{\Pi}{g}\,c\,(Mv+Nv^2)\,s.v\,dt.$$

La ecuacion de las fuerzas vivas será por consiguiente

$$\frac{\Pi Q\,dt}{g}v^2\left(\frac{\omega^2}{\Omega'^2}-\frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)=2\Pi Q\,h\,dt+\frac{2\Pi c}{g}(Mv+Nv^2)s.vdt;$$

y dividiéndola por $2\Pi Qdt$ despues de poner en el último término por v su equivalente $\frac{Q}{\omega}$,

$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{\omega^2}{\Omega'^2}-\frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)=h-\frac{cs}{\omega}\left(\frac{M}{g}v+\frac{N}{g}v^2\right).$$

189. En las aplicaciones la seccion de la cañería es muy pequeña respecto de las secciones horizontales de los depósitos, y sobre todo del superior: despreciando pues la fraccion $\frac{\omega^2}{\Omega^2}$, se tiene

$$h-\frac{v^2}{2g}\cdot\frac{\omega^2}{\Omega'^2}=\frac{cs}{g\omega}(Mv+Nv^2).$$

190. Si se supone ademas que el extremo inferior D sale al aire libre, ó que se suprime este depósito, fig. 42, la ecuacion anterior se reduce á

$$h-\frac{v^2}{2g}=\frac{cs}{\omega}\left(\frac{M}{g}v+\frac{N}{g}v^2\right).$$

191. Los valores de los coeficientes M y N deducidos de experiencias hechas directamente sobre las cañerías difieren algo de los hallados en el núm. 127 para los rios y acueductos abiertos. Tomando la pulgada por unidad de medida los determinados por Couplet y adoptados por Daubuisson vienen á ser

$$M=0{,}00796,\ N=0{,}00336$$

que haciendo $g=421{,}15$, $\frac{M}{g}=A$, $\frac{N}{g}=B$, dan

$A=0{,}00001889$, $\log.A=5{,}2750233$

$B=0{,}00000796$, $\log.B=4{,}9005150$; (*)

y la ecuacion del movimiento será definitivamente

$$h-\frac{v^2}{2g}=\frac{cs}{\omega}(0{,}0000189\,v+0{,}00000796\,v^2).$$

Siendo h la carga total, y $\frac{v^2}{2g}$ la carga ó altura debida á la velocidad de salida, la cantidad $\frac{cs}{\omega}(Av+Bv^2)$ representa evidentemente la porcion de la altura ó carga de agua consumida por la resistencia de las paredes en la extension s.

En las cañerías, si bien la principal y de mas bulto, no es esta la sola resistencia que tiene lugar. Ocurren ademas otros obstáculos que ocasionando pérdidas de fuerza viva, absorven por su parte cierta porcion de la carga total. Tales son los recodos ó las variaciones de direccion de la cañería en el sentido vertical ú horizontal, y tambien las variaciones repentinas de diámetro, sea que se angoste ó sea que se ensanche el acueducto desde una seccion á la inmediata.

Del efecto de los recodos.

192. Es sabido (núm. 37) que cuando un sistema de cuerpos se ve obligado á mudar súbitamente de direccion pierde una cierta porcion de fuerza viva; pero que si entra tangencialmente en una curva contínua, sale de ella con la misma fuerza viva que tenia y que conserva al correr la

(*) Segun lo que se dijo en la nota del núm. 127 el ingeniero cuidará de formar una tabla de los valores de g, A y B segun la latitud y altura sobre el nivel del mar del terreno á quien aplique estas fórmulas.

curva. Pero aunque esto deba suceder á los filetes del agua contiguos á las paredes, no será lo mismo respecto de los demas que experimentarán cierta reflexion tanto mayor cuanto mas próximos se hallen al filete central. El conjunto de todos los filetes ó la masa fluida sufrirá por consiguiente durante el tiempo dt una pérdida de fuerza viva media, que segun experiencias de Dubuat podrá representarse por la expresion

$$\frac{\Pi}{g} Q dt.v^2 (M' + N'R) \frac{a}{R^2},$$

siendo R el radio Om del arco mn, figura 43, que une las dos direcciones del eje; a la longitud mn de este arco; y M', N' coeficientes que se han determinado por las mismas experiencias, y que referidos á la pulgada española son

$$M' = 0{,}16796 \text{ , } \log.M' = 9{,}2252102;$$
$$N' = 0{,}0186 \text{ , } \log.N' = 8{,}2695129.$$

Se añadirá esta fuerza viva al primer miembro de la ecuacion hallada en el núm. 188 despues de dividirla por $2\Pi Qdt$, lo que equivale á añadir al segundo miembro de la del núm. 190 la cantidad

$$\frac{v^2}{2g}(0{,}16796 + 0{,}0186.R)\frac{a}{R^2},$$

ó teniendo presente que $v = \frac{Q}{\pi r^2}$ y $g = 421{,}15$, la

$$\frac{Q^2}{r^4} \cdot \frac{a}{R^2}(0{,}0000202 + 0{,}0000022.R)$$

para tener la ecuacion del movimiento del fluido despues de su paso por el recodo.

En el caso de haber muchos recodos se añadirán otros tantos términos de la misma forma, poniendo por a y R los valores que á cada uno correspondan.

La expresion anterior hace ver que cuando se puede disponer de un radio grande para disminuir la curvatura de los arcos, el efecto de los recodos se puede atenuar hasta el punto de hacerle despreciable. Esto es lo que las mas veces sucede en las aplicaciones.

Efecto de la disminucion ó aumento repentino de la seccion trasversal.

193. Al establecer una cañería se cuida siempre de que todos los tubos tengan un mismo diámetro, y se podria excusar la valuacion de este efecto si en algunos parajes no se notasen depósitos térreos que angostan la seccion, y aun suelen acabar por taparla enteramente.

Supongamos en primer lugar, fig. 44, interpuesta una placa delgada con una abertura mas pequeña ω' que la seccion ω del caño. Siendo m el coeficiente de contraccion, la velocidad por esta abertura será $v\frac{\omega}{m\omega'}$, de donde resulta una variacion súbita de velocidad $v\left(\frac{\omega}{m\omega'} - 1\right)$, y durante el instante dt para la masa fluida una pérdida de fuerza viva

$$\frac{\Pi}{g} Q dt.v^2 \left(\frac{\omega}{m\omega'} - 1\right)^2.$$

La expresion que por esta causa deberá añadirse al segundo miembro de la ecuacion del núm. 190, será por consiguiente

$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{\omega}{mv'}-1\right)^2.$$

Y si hubiere muchas placas suficientemente separadas para que en su intervalo recupere el fluido la velocidad ordinaria v, se añadirán otros tantos términos de la misma forma.

194. Estos resultados se pueden aplicar aun cuando á las placas se sustituyan caños cuya longitud no exceda de dos ó tres veces el diámetro, dando á m el valor conveniente segun el núm. 65.

195. En el caso de que sea mas larga la porcion angosta de la cañería, como cuando proviene de los depósitos térreos que se petrifican y adieren á sus paredes, la porcion de carga que consumirá será, 1.°

$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{\omega}{\omega'}-1\right)^2$$

debida á la fuerza viva perdida al entrar el fluido en la porcion angosta: 2.°

$$\frac{c's'}{\omega'}\left(Av\frac{\omega}{\omega'}+Bv^2\frac{\omega^2}{\omega'^2}\right)$$

debida á la resistencia de las paredes en esta porcion: c', s', ω' son respectivamente el perímetro, la longitud y la seccion trasversal de la angostura.

La suma de estas dos cantidades se añadirá al segundo miembro de la ecuacion citada.

196. Cuando el fluido pasa repentinamente á una seccion mas ancha ω'', fig. 45, la pérdida de velocidad es $v-v\frac{\omega}{\omega''}$ á su entrada C, y la de fuerza viva del volúmen Q en el tiempo dt

$$\frac{\Pi}{g}Qdtv^2\left(1-\frac{\omega}{\omega''}\right)^2;$$

debiendo por consiguiente añadirse al segundo miembro de dicha ecuacion la cantidad

$$\frac{v^2}{2g}\left(1-\frac{\omega}{\omega''}\right)^2.$$

Se prescinde, como hemos hecho en el núm. 188, de la contraccion que tiene lugar al volver á entrar el fluido por D en la cañería.

197. En el caso de que una cañería esté dividida en porciones de diferente diámetro y que el paso de cada una á la siguiente sea por grados insensibles, en vez del primer término del segundo miembro se pondrán varios de la misma forma

$$\frac{cs}{\omega}(Av+Bv^2),\ \frac{c's'}{\omega'}\left(Av\frac{\omega}{\omega'}+Bv^2\frac{\omega^2}{\omega'^2}\right)\ \&c.$$

siendo v la velocidad en la porcion de cañería cuya seccion, perímetro y longitud son ω, c, s;....ω', c' la seccion y perímetro cuya longitud es s'; &c.

198. Por último, cuando al extremo de una cañería se adapta uno ó varios caños cuya seccion ó suma de secciones es menor que la del acueducto para dar salida al agua, si se designa por $\omega_{\prime}$ su seccion ó la suma de las secciones, y por m el coeficiente de contraccion que segun los números 65 ó 71 les corresponde, la velocidad de su salida será $v\frac{\omega}{m\omega_{\prime}}$, y en lugar del segundo término $\frac{v^2}{2g}$ del primer miembro deberá ponerse $\frac{v^2}{2g}\cdot\frac{\omega^2}{m^2\omega_{\prime}^2}$ en la ecuacion de movimiento.

199. Reuniendo todas las pérdidas de altura de agua que tienen lugar en una cañería desde el depósito hasta que sale el agua al aire libre, y designando por Σ la suma

de los términos de la misma forma, la ecuacion general es

$$h - \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{\omega^2}{m^2 \omega_1^2} = \Sigma \frac{cs}{\omega}(Av + Bv^2) + \Sigma \frac{v^2}{2g}(M' + N' R)\frac{a}{R^2}$$

$$+ \Sigma \frac{v^2}{2g}\left(\frac{\omega}{m\omega_2} - 1\right)^2 + \Sigma \frac{v^2}{2g}\left(\frac{\omega}{\omega_3} - 1\right)^2 + \Sigma \frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{\omega}{\omega_4}\right)^2:$$

h es la altura del nivel del depósito sobre el orificio extremo de salida: el segundo término es la altura debida á la velocidad con que sale el agua por este extremo: el primer miembro expresa por consiguiente la altura ó carga de agua consumida por todas las resistencias que constan en el segundo miembro, á saber: 1.° por la adherencia á las paredes de la cañería: 2.° por los recodos: 3.° y 4.° por las gargantas estrechas de poca ó mucha longitud: 5.° por los ensanches repentinos.

200. Desde un punto á otro de una cañería la altura de agua consumida por las resistencias será la debida á las causas que entre las que se acaban de nombrar tengan lugar en el intervalo de los dos puntos, y se calculará sumando los términos que les sean relativos.

201. En las cañerías bien construidas la seccion trasversal es la misma en toda su extension: solo habrá que atender á la resistencia de las paredes, y tal cual vez á los recodos. Considerando solo la primera, llamando r el radio de la seccion, r' el del caño de salida, lo que da $c = 2\pi r$, $\omega = \pi r^2$, $\frac{c}{\omega} = \frac{2}{r}$, y poniendo por v su valor

$\frac{Q}{\omega}$ ó $\frac{Q}{\pi r^2}$, se tendrá

$$h - \frac{Q^2}{2g\pi^2 r^4} \cdot \frac{r^4}{m^2 r'^4} = \frac{2s}{r}\left(A\frac{Q}{\pi r^2} + B\frac{Q^2}{\pi^2 r^4}\right);$$

ó haciendo $g = 421^p,15$, $\pi = 3,1416$ y sustituyendo en vez de A y B sus valores del núm. 191,

$$h - 0,00012 \frac{Q^2}{m^2 r'^4} = 0,000012 \frac{Qs}{r^3} + 0,0000016 \frac{Q^2 s}{r^5};$$

que con la $Q = \pi r^2 v$ servirá para determinar dos de las cantidades h, s, Q, r, r', v, cuando sean dadas las otras cuatro.

Sin embargo, como por cuidado que se ponga en la eleccion y colocacion de los caños nunca se puede conseguir la lisura y regularidad de los que han servido para las experiencias, convendrá en la práctica no contar con que el gasto Q sea tan grande como el que dan las fórmulas. Las mas veces será $\frac{1}{4}$ y aun $\frac{1}{3}$ menor. Por lo mismo aconseja Daubuisson que cuando este gasto sea dado, se considere aumentado en una mitad mas para calcular despues por él las otras cantidades que entran en el establecimiento de una cañería.

202. Suponiendo como en el núm. 190, que el extremo de la cañería desemboca al aire libre, lo que equivale á hacer $r' = r$, $m = 1$, la fórmula viene á ser

$$h - 0,00012 \frac{Q^2}{r^4} = 0,000012 \frac{Qs}{r^3} + 0,0000016 \frac{Q^2 s}{r^5},$$

ó

$$hr^5 - 0,00012 Q^2 r - 0,000012 Q s r^2 - 0,0000016 Q^2 s = 0.$$

203. El valor del gasto, dada la longitud, la carga de agua y el radio, es

$$Q = \frac{-37,5r^2 s + 790,57 r^2 \sqrt{(hr(s + 750r) + 0,0022 s^2)}}{s + 750r}.$$

Si la cañería es muy larga, y despreciable por consiguiente el término $750r$ respecto de s, se podrá tomar co-

mo valor aproximado en la práctica

$$Q = -37{,}5r^2 + 790{,}57r^2 \sqrt{\frac{hr}{s}}.$$

Dada la cantidad de agua, la longitud del acueducto y su diámetro, se tendrá la altura del depósito sobre el nivel de salida del agua por la fórmula

$$h = 0{,}00012\frac{Q^2}{r^4} + 0{,}000012\frac{Qs}{r^3} + 0{,}0000016\frac{Q^2s}{r^5}.$$

Por último, si conocida la diferencia de nivel de los extremos, el caudal de agua, y la longitud del acueducto, se quiere su seccion trasversal, se resolverá la ecuacion

$$r^5 - 0{,}000012\frac{Qs}{h}r^2 - 0{,}00012\frac{Q^2}{h}r - 0{,}0000016\frac{Q^2s}{h} = 0:$$

un primer valor aproximado es

$$r = 0{,}0693\sqrt[5]{\frac{Q^2s}{h}}$$

que será algo menor que el verdadero, y sustituido en la ecuacion producirá un primer miembro negativo. Por el método tantas veces usado de las sustituciones sucesivas se obtendrá una raiz r tan aproximada como se desea.

204. Cuando la velocidad pase de dos pies por segundo se podrán usar las fórmulas aproximadas

$$Q = 753{,}6r^2\sqrt{\frac{hr}{s}},$$

$$r = 0{,}0706\sqrt[5]{\frac{Q^2s}{h}}.$$

De la presion sobre las paredes.

205. Para valuar la presion que tiene lugar en una seccion cualquiera AB, fig. 42, basta considerar la porcion de cañería CA y establecer respecto de ella el principio tantas

veces empleado de la conservacion de las fuerzas vivas. Llamemos

- z la altura del nivel del depósito sobre el centro de gravedad de la seccion AB;
- ω la área de esta seccion;
- p la presion, referida á la unidad de superficie, que tiene lugar sobre esta seccion;
- s' la longitud de cañería MA comprendida entre las dos secciones;

y conservemos las demas denominaciones del núm. 188.

Suponiendo desde luego que la seccion de la cañería es muchísimo menor que la del depósito, lo que hace insensible la velocidad del fluido en la seccion ab, la fuerza viva adquirida por la masa MA en el tiempo dt es $\frac{\Pi}{g}Qdt.v^2$.

La cantidad de accion impresa por la gravedad á la misma masa en virtud del descenso z del centro de gravedad del volúmen Qdt adelantado por un extremo ó desocupado por el otro es $\Pi Qdt.z$.

La cantidad de accion debida á la presion sobre ab se considera como nula por ser sumamente pequeña la velocidad vertical en el depósito.

Siendo $p\omega$ la presion sobre AB, remplazándola por una fuerza igual que obre en sentido contrario, su cantidad de accion durante el mismo tiempo es $p\omega.vdt$.

Ultimamente, la cantidad de accion debida á la resistencia de las paredes en la longitud s' es $\frac{\Pi}{g}cs'(Mv+Nv^2)vdt$.

La ecuacion de las fuerzas vivas es pues

$$\frac{\Pi}{g}Qdt.v^2 = 2\Pi Qdt.z - 2p\omega vdt + \frac{2\pi}{g}cs'(Mv+Nv^2)vdt,$$

y dividiendo por Qdt,

$$p = \Pi \left(z - \frac{v^2}{2g} - \frac{cs'}{g\omega} (Mv + Nv^2) \right)$$

á cuyo 2.° miembro se podrán añadir las demas pérdidas de carga ocasionadas por los recodos ó por la solucion de continuidad de la cañería segun fueron calculadas en los números 192 á 195.

Traducida esta expresion, dice que la presion en un punto cualquiera de una cañería es la debida á la carga z sobre dicho punto, menos la altura debida á la velocidad del fluido y menos la altura consumida por las resistencias que han tenido lugar desde el orígen hasta el punto que se considera.

206. Sabiéndose que la presion p seria $= \Pi z$ si el fluido estuviese en reposo, ó si se tapase el extremo D, la expresion anterior hace conocer la disminucion que ocasiona la velocidad v y la resistencia de las paredes.

Prescindiendo de esta última resistencia, lo que puede hacerse cuando es muy corta la cañería ó que se reduce á un tubo cuya longitud es de solo 2 ó 3 veces el diámetro, la presion se reduce á

$$p = \Pi \left(z - \frac{v^2}{2g} \right),$$

y si $\frac{v^2}{2g}$ es mayor que z, la presion será negativa, el fluido no se adherirá á las paredes del tubo, y la vena se contraerá dejando un vacío entre ella y las paredes. Tal es el caso considerado en el número 65.

207. Volviendo al caso general, si se abre un orificio en el punto B y se le aplica un tubo, el agua ascenderá en este á la altura indicada por la expresion

$$z - \frac{v^2}{2g} - \frac{cs'}{g\omega} (Mv + Nv^2),$$

ó eliminando $\frac{c}{g\omega} (Mv + Nv^2)$ por medio de la ecuacion general del número 190,

$$z - h \frac{s'}{s} - \frac{v^2}{2g} \left(1 - \frac{s'}{s} \right).$$

En el extremo D donde $z = h, s' = s$, la presion es nula, ó la altura es cero. Si desde el punto M á D se tira la recta MD, pudiendo en las aplicaciones mirarse la relacion $\frac{s'}{s}$ como igual á $\frac{Mn}{Mm}$, el término $h \frac{s'}{s}$ estará representado por la línea mP, y $z - h \frac{s'}{s}$ por la altura PB, de la cual se rebajará el valor $\frac{v^2}{2g} (1 - \frac{s'}{s})$ que será tanto menor cuanto mas próximo se halle al extremo D el punto de que se trata. Como la cantidad $\frac{v^2}{2g}$ es de por sí bastante pequeña en estos acueductos, la altura del agua en el tubo diferirá poco de BP.

Para otro punto B' cuya carga es z' tomado á la distancia $CBB' = s''$, la altura que mide la presion es

$$z' - h \frac{s''}{s} - \frac{v^2}{2g} \left(1 - \frac{s''}{s} \right),$$

cuyo valor por lo que acaba de decirse será poco menor que $B'P'$.

208. Si designamos por h' y h'' las alturas de agua

$$\frac{cs'}{g\omega} (Mv + Nv^2), \quad \frac{cs''}{g\omega} (Mv + Nv^2)$$

y las demas consumidas por las resistencias en las longitu-

des DB y DB', restando una de otra las alturas de los tubos $B'P'$ y BP ó

$$H=z-\frac{v^2}{2g}-h',\quad H'=z'-\frac{v^2}{2g}-h'',$$

se saca $$h''-h'=z'-H'-(z-H);$$

y por ser $$z'-H'=m'P' \text{ y } z-H=mP,$$

$$h''-h'=m'P'-mP,$$

se deduce que *la diferencia de nivel del agua en dos tubos aplicados á dos puntos de una cañería es igual á la carga de agua consumida por las resistencias en el intervalo de los dos.*

209. Estos tubos, llamados por su objeto *piezómetros* ó medidores de la presion, se aplican en algunos puntos de una cañería para juzgar por su inspeccion del estado de ella y del incremento de las resistencias que por cualquier causa sobrevengan. Haciéndolos pasar por el interior de una habitacion, y construyendo de vidrio una porcion conveniente de su longitud, se puede marcar en una escala el punto adonde sube el agua cuando se cierra el extremo inferior de la cañería: este punto estará al mismo nivel del depósito. Si destapado el extremo se sueltan sucesivamente diferentes cantidades de agua, el nivel de la columna piezométrica variará cada vez de posicion, y marcándola en la escala se conocerá recíprocamente en lo sucesivo la cantidad de agua que pasa. Con efecto, las alturas piezométricas en el mismo tubo correspondientes á los gastos Q, Q' &c. son

$$H=z-\frac{Q^2}{2g\omega^2}-h',$$

$$H_{,}=z-\frac{Q'^2}{2g\omega^2}-h';$$

y

$$H-H_{,}=\frac{Q'^2-Q^2}{2g\omega^2}.$$

Si es constante el gasto, la disminucion que sobrevenga á H no podrá provenir sino del aumento de la pérdida h' de carga, ocasionada por las resistencias desde el depósito hasta el punto donde se halla puesto el piezómetro.

210. La presion que hemos calculado en el núm. 205 sirve tambien para determinar el grueso que debe darse á los tubos en una cañería.

Atendiendo á que la mayor presion que tiene lugar es $p=\Pi z$, llamando F' la mayor tension por pulgada cuadrada á que puede exponerse la materia del tubo, el grueso b que deberá dársele será, segun el núm. 330 de la Teoría mecánica de las construcciones,

$$b=\frac{\Pi rz}{F'}.$$

211. Los tubos de hierro colado admitidos por los fontaneros franceses deben aguantar una carga de agua de 100 metros de altura ó de 4307 pulgadas. Haciendo $z=4307^p, \Pi=0^q,00027$, $F'=40^q$ (núm. 117 de la Teoría mecánica), se tendrá

$$b=0,03r.$$

D'Aubuisson establece que se les dé de espesor $0,02r$ mas una cantidad constante de $0^p,43$ por razon de los choques de agua á que está expuesta una cañería cuando se detiene súbitamente su curso por los defectos de la fundicion y por el orin que continuamente los corroe y adelgaza. Segun esto

el grueso de los tubos de hierro deberá ser en pulgadas españolas

$$b = 0{,}02r + 0{,}43.$$

Si en alguna circunstancia la altura z sobre la parte mas baja de la cañería excediese de 4320 pulgadas ó de 360 pies, se calcularia el grueso b por la fórmula general del número anterior.

Se prefieren los tubos de hierro colado á los de plomo, porque á igualdad de resistencia son mas baratos: á los de madera, porque bien que muy resistentes respecto de su primer coste, se pudren muy pronto, necesitando de continuos reparos y reemplazarse á menudo por otros nuevos: á los de barro cocido, porque solo pueden emplearse con cargas de agua muy pequeñas, porque es difícil embetunar bien sus numerosas juntas, y porque de todos modos estan muy expuestos á quebrarse.

DE LAS CAÑERIAS QUE CONSTAN DE VARIOS RAMALES.

Efectos de las perturbaciones del movimiento y de la oblicuidad de los ramales secundarios al entrar en ellos el agua desde la cañería principal.

212. Las mas veces la longitud de una cañería está dividida en diferentes trozos por arcas ó cambijas que al paso que sirven para dar salida al aire, proporcionan repartir el agua por otras cañerías secundarias á diversos puntos. Estas se subdividen del mismo modo, y aun tambien ingiriendo en ellas otros tubos de tercer órden para conducir parte del agua á parajes determinados. De la pérdida de fuerza viva que tiene lugar en este último caso al pasar parte del agua

de una cañería á un ramal que forme con ella un ángulo dado, es de la que vamos á tratar.

Las únicas experiencias que pueden servir para indicar la ocasionada por las perturbaciones en el movimiento del agua son las hechas por Mallet y Genieis. Segun ellas llamando v' la velocidad del agua en el ramal, saca d' Aubuisson que la pérdida de fuerza viva en el tiempo dt es

$$\frac{\Pi}{g} Q dt . 2v'^2;$$

y será causa de un consumo igual al doble de la debida á la velocidad en el ramal cerca de su entrada, esto es,

$$\frac{2v'^2}{2g};$$

ó siendo $\omega_{,}$ la seccion trasversal del ramal y Q' su gasto,

$$\frac{Q'^2}{g\omega_{,}^2};$$

cantidad que se añadirá al segundo miembro de la ecuacion del núm. 190.

213. En cuanto al efecto de la oblicuidad, se sabe que designando por α el ángulo del ramal con el acueducto, la velocidad estimada en el sentido de su direccion es $v\cos.\alpha$; su pérdida es pues $v\,(1-\cos.\alpha)$; la de la fuerza viva,

$$\frac{\Pi}{g} Q dt v^2 (1-\cos.\alpha)^2;$$

y la de la carga de agua

$$\frac{v^2}{2g}(1-\cos.\alpha)^2,$$

que será un nuevo término de dicho segundo miembro.

214. Cuando al extremo de un ramal se adapta un caño de menor diámetro para dar salida al agua, si se designa por ω_2 su seccion trasversal y por m' el coeficiente de

contraccion que segun los números 65 y siguientes le corresponde, la velocidad de su salida por este extremo será $v'\frac{\omega_{\prime}}{m'\omega_2}$, y la altura debida á esta velocidad,

$$\frac{v'^2\omega_{\prime}^2}{2g.m'^2\omega^2} \quad \text{ó} \quad \frac{Q'^2}{2gm'^2\omega_2^2};$$

cantidad que se sustituirá en vez de $\frac{v^2}{2g}\cdot\frac{\omega^2}{m^2\omega_{\prime}^2}$ en el segundo término de la citada ecuacion.

215. Segun esto, llamando para abreviar

h' la suma de las alturas de agua consumidas en el acueducto principal por las causas expresadas en el núm. 190 hasta su encuentro con el ramal;

h'' la suma análoga consumida en el ramal hasta la salida del agua al aire libre;

la ecuacion del movimiento será

$$h-\frac{Q'^2}{2gm'^2\omega_2^2}=h'+h''+\frac{Q^2}{2g\omega^2}(1-\cos.\alpha)^2+\frac{2Q'^2}{2g\omega_{\prime}^2};$$

y si el extremo del ramal desemboca al aire libre, lo que da $\omega_2=\omega_{\prime}$, $m'=1$,

$$h-\frac{3Q'^2}{2g\omega_{\prime}^2}=h'+h''+\frac{Q^2}{2g\omega^2}(1-\cos.\alpha)^2;$$

ó bien poniendo en el primer miembro las cantidades relativas al acueducto principal y en el segundo las relativas al ramal,

$$h-h'-\frac{Q^2}{2g\omega^2}(1-\cos.\alpha)^2=h''+\frac{3Q'^2}{2g\omega_{\prime}^2}.$$

El primer miembro expresa la altura de agua que viene á cargar sobre el principio del ramal.

Poniendo en vez de ω, ω_1, $2g$ sus valores $3,1416r^2$, $3,1416r'^2$, $842^p,30$, se tiene definitivamente

$$h-h'-0,00012\frac{Q^2}{r^4}(1-\cos.\alpha)^2=h''+0,00036\frac{Q'^2}{r'^4}.$$

Siguiendo el ejemplo de D'Aubuisson vamos á aplicar la doctrina anterior á la distribucion de las aguas en una ciudad.

Se tienen en un depósito *A*, fig. 46, adonde se ha subido el agua desde un rio por medio de máquinas ó adonde ha ido á parar conducida en un acueducto cualquiera, 1566 rs. de agua. Los puntos donde se ha de expender y la cantidad de cada uno son dados por la autoridad local (*). Al ingeniero toca medir con exactitud las diferencias de nivel del depósito y los puntos por donde ha de salir el agua; construir el plano de las cañerías y ramales: medir la longitud de los diferentes tramos y los ángulos de unos con otros. Con estos datos que puede ordenar segun la tabla siguiente, y aumentando el caudal de agua en una mitad mas, procederá por las anteriores fórmulas al cálculo del calibre de los tubos que está escrito en la penúltima columna, como vamos á ver.

(*) Para el surtido de aguas potables de una poblacion se computan necesarios $\frac{5}{8}$ de real por cada 100 almas, ó $1^{ppp},875$ por segundo, ó $93^{PPP},75$ por dia, lo que equivale á unas 10 azumbres diarias por habitante. En Lóndres tienen mas del doble de esta cantidad. En Madrid no llega á la tercera parte.

En las distribuciones de agua á las tropas se atribuyen 7 cuartillos diarios á cada plaza, lo que corresponde, contando con las mermas, á unos 9^{PPP} por cada 100 hombres.

PUNTOS.				TRAMOS DE CAÑERIA.			
Designacion de los puntos.	Altura del depósito sobre cada uno.	CANTIDAD DE AGUA DE CADA UNO.		Designacion de los tramos.	LONGITUD.	RADIO CALCULADO.	RADIO ADOPTADO.
	Pulgadas.	En reales.	En pulgadas con el aumento.		Pulgadas.	Pulgadas.	Pulgadas.
B				*AB*	32500	9,07	10
a	345	24	108	*ia*	27000	1,30	2
b	430,50	12	54	*lb*	10800	0,76	1
c	724	30	135	*Kc*	11120	0,87	1
C		450	2025	*BC*	17430	5,55	6
d	185	378	1701	*Cd*	30000	4,75	5
e	108	210	945	*Bn*	4650	4,76	5
f	378	30	135	*nq*	12060	1,47	2
				pf	8640	1,14	2
g	420	18	81	*qg*	4650	0,75	1
h	400	12	54	*qh*	20600	0,87	1
D		390	1755	*BD*	50400	5,12	6
j	390	12	54	*sj*	8700	0,69	1
		1566	7047				

Para completar los datos necesarios se halla ademas $Ai=8100^p$; $iK=3600^p$; $il=17700^p$; $np=4740^p$; $pq=7320^p$; $Bs=48000^p$.

Los ángulos en $L=50°$; $K=50°$; $K'=110°$; $K''=75°$; $K'''=45°$; $K''''=95°$; $a'=45°$; $a''=45°$; $r=90°$; $d'=138°$. El radio del arco de todos los recodos es de 180 pulgadas: B, C y D son puntos de distribucion. Al determinar los niveles de estos puntos se debe atender á que ni por demasiado descenso se imposibilite ó se dificulte la conduccion del agua desde ellos á los extremos, ni por demasiado poco tengan que hacerse de excesivo diámetro los tubos principales, puesto que esto exigiria (núm. 210) mayor espesor y por consiguiente mayor coste. En el problema propuesto

se ve por ejemplo que en el punto d solo hay 185 pulgadas de desnivel respecto del depósito. Se distribuirá esta altura como sigue: 45 pulgadas de A á B: 80^p de B á C, quedando 65^p de C á d; de B á D pondremos 84 pulgadas.

1.° Establecidos todos estos datos calculemos el radio de la cañería principal AB, que lleva de A á i todas las 7047^{ppp} de agua, de i á K 6885^{ppp}, y de K á B 6750^{ppp}. Siendo muy pequeñas las cantidades de agua que se derivan en i y K, haremos todo este tramo AB del mismo calibre. Mas para que la resistencia de sus paredes sea un promedio entre las que ofrecen estos tres trozos, calcularemos un caudal de agua que produzca dicha resistencia. Segun el núm. 125, si prescindimos del término Av, la expresion de la resistencia de las paredes á igualdad de seccion es proporcional al producto de su longitud por el cuadrado de la velocidad, ó lo que es lo mismo, por el cuadrado del caudal. Asi, pues, el caudal medio que se busca podrá calcularse por la expresion

$$\sqrt{\frac{7047^2.\,8100+6885^2.\,3600+6750^2.\,20800}{8100+3600+20800}}$$

que da $Q=6840$: para mayor seguridad haremos $Q=6900^{ppp}$, y esta será la cantidad de agua que supondremos haya de llevar la cañería AB de 32500^p de largo. El agua baja del depósito A por un tubo vertical, y por medio de un recodo de 90° marcha casi horizontalmente para subir por otro recodo de 90° al arca de distribucion B. La altura consumida por la resistencia de las paredes es segun el núm. 191 ó 201

$$\frac{0{,}000012.\,32500.\,6900}{r^3}+\frac{0{,}0000016.\,32500.\,6900^2}{r^5}$$

ó

$$\frac{2691}{r^3}+\frac{2475800}{r^5};$$

la consumida por los dos recodos, puesto que

$$R=180^p; a=\frac{\pi}{2}.180=282^p,74; \frac{a}{R^2}=0,008727,$$

es segun el núm. 192

$$\frac{Q^2}{r^4}.2.0,008727(0,0000202+0,0000022.180),$$

ó $\frac{346}{r^4}$.

Suponiendo que el arca B es un cilindro de 18 pulgadas de radio, la cantidad $\frac{v^2}{2g}.\frac{\omega^2}{\Omega'^2}$ en que $\Omega'=\pi.18^2$ se convierte en $\frac{Q^2}{2g\Omega'^2}=0^p,0054$; y esta cantidad deberá restarse de las 45 pulgadas segun indica la ecuacion del núm. 189 para obtener la pérdida de carga. Pero despreciando este número por su pequeñez, escribiremos simplemente 45, y la ecuacion vendrá á ser

$$\frac{2691}{r^3}+\frac{2475800}{r^5}+\frac{346}{r^4}=45,$$

ó

$$r^5-59,80r^2-7,69r-55016=0:$$

para hallar el valor de r haremos

$r=8,88$ lo que produce.. $-4781=0$;
$r=9$ .... $-891=0$;
$r=9,05$ .... $+726=0$;
$r=9,028$ .... $+14=0$;
$r=9,027$ .... $-18=0$;
$r=9,0275$ .... $+6=0$:

resulta, pues, $r=9^p,0275$ muy próximamente.

Para atender á las pérdidas de carga que puede ocasionar la perturbacion del movimiento dentro del arca B, convendrá suponer que sale aquí el agua por el tubo al aire libre, lo que equivale á introducir el término $-\frac{v^2}{2g}$ de la ecuacion del núm. 190. Esta cantidad equivale á $\frac{Q^2}{2g\pi^2r^4}=\frac{5727}{r^4}$, y la ecuacion del movimiento de quien despejaremos r será

$$\frac{2691}{r^3}+\frac{2475800}{r^5}+\frac{346}{r^4}=45-\frac{5727}{r^4}$$

ó

$$r^5-59,80r^2-134,96r-55016=0;$$

haciendo $r=9,1$ resulta.. $+1306=0$;
$r=9,06$ ...... $-107=0$;
$r=9,063$ ...... $-7=0$;

Tendremos pues $r=9^p,07$ muy próximamente.

En vez de una sola cañería que lleve toda el agua, es mucho mejor emplear dos pareadas, capaces cada una de llevar la mitad de dicha cantidad. De este modo no se interrumpe totalmente el servicio de las fuentes cuando es preciso reparar una de las dos cañerías. El radio de cada una se calcula por la misma ecuacion haciendo $Q=3450$.

De paso puede notarse tambien la poca influencia de los recodos, puesto que entre los dos solo consumen una porcion de altura de agua representada por $\frac{346}{r^4}$ que no pasa de $0^p,05$.

2.° El caudal que ha de llevar el ramal ia es de 162^{ppp} desde i á l. En atencion á que al es poco considerable respecto de ai, se supondrá que toda esta agua llega hasta a. En la última ecuacion del núm. 215 es $h=345$; $Q=6900$; $r=9,07$; $x=90°$; $Q'=162$; h' ó la suma de las resistencias

que tienen lugar en la cañería principal desde A hasta i por causa de la resistencia de las paredes y de un recodo es

$$\frac{0,000012.6900.8100}{9,07^3}+\frac{0,0000016.6900^2.8100}{9,07^5}$$

ó $h'=0,899+10,052+0,025=10,976$;

la suma de las resistencias ocasionadas por las paredes del ramal ai, cuya longitud es de 27000, es segun el núm. 201

$$h''=\frac{0,000012.162.27000}{r'^3}+\frac{0,0000016.162^2.27000}{r'^5}$$

$$=\frac{52,50}{r'^3}+\frac{1133,80}{r'^5};$$

el término $0,00012\frac{Q^2}{r^4}(1-\cos.\alpha)^2$ se reduce á

$$\frac{0,00012.6900^2}{9,07^4}=0,8442;$$

y el último término del segundo miembro á

$$\frac{0,00036.162^2}{r'^4}=\frac{9,45}{r'^4};$$

dicha ecuacion es pues

$$345-10,976-0,844=\frac{52,50}{r'^3}+\frac{1133,80}{r'^5}+\frac{9,45}{r'^4},$$

ó $r'^5-0,158r'^2-0,028r'-3,403=0$,

que da $r'=1,30$.

3.° Para el ramal subalterno lb que ha de llevar 54^{ppp} de agua con la carga de $430^p,50$, la suma h' de las resistencias desde A hasta l se compone: 1.° de las que ocurren de A á i acabadas de calcular, equivalentes á 10,976: 2.° de la variacion de direccion en i que produce 0,844:

3.° de las que tienen lugar desde i á l, cuya longitud es de 17700, y dan

$$\frac{0,000012.162.17700}{1,30^3}+\frac{0,0000016.162^2.17700}{1,30^5}=$$

$$=15,662+200,185=215,847;$$

resulta pues $h'=10,976+0,844+215,847=227,667$.

El ángulo $l=40°$, su coseno $=0,766$ y el término

$$0,00012\frac{Q^2}{r^4}(1-\cos.\alpha)^2=\frac{0,00012.162^2.0,234^2}{1,30^4}=0,060.$$

El valor h'' debido á la resistencia en el ramal lb, cuya longitud es de 10800, viene á ser

$$h''=\frac{0,000012.54.10800}{r'^3}+\frac{0,0000016.54^2.10800}{r'^5}$$

$$=\frac{6,998}{r'^3}+\frac{50,387}{r'^4}.$$

El término $0,00036\frac{Q'^2}{r'^4}=\frac{0,00036.54^2}{r'^4}=\frac{1,051}{r'^4}$.

Y la ecuacion

$$h-h'-0,00012\frac{Q^2}{r^4}(1-\cos.\alpha)^2=h''+0,00036\frac{Q'^2}{r'^4}$$

es ahora

$$430,50-215,847-0,060=\frac{6,998}{r'^3}+\frac{50,387}{r'^5}+\frac{1,051}{r'^4}$$

ó $r'^5-0,033r'^2-0,005r'-0,235=0$,

y de aqui

$$r'=0,76.$$

4.° El ramal $KK'c$ de 11120 pulgadas ha de conducir 135^{ppp} bajo una carga de 724^p. El valor de h' debido á la resistencia de A á i y de i á K, ó mejor desde A á K, es

$$h'=\frac{0,000012.6900.11700}{9,07^3}+\frac{0,0000016.6900^2.11700}{9,07^5}+0,025$$

$$=1,300+14,520+0,025=15^p,845;$$

la altura debida á la variacion en K:

$$\frac{0,00012.6900^2}{9,07^4}(1-\cos.50^\circ)^2 = 0^p,108,$$

la debida á la resistencia del ramal Kc es

$$\frac{0,000012.135.11120}{r'^3} + \frac{0,0000016.135^2.11120}{r'^5}$$

$$= \frac{18,014}{r'^3} + \frac{324,250}{r'^5}.$$

Siendo los recodos K', K'', K''', K'''' de 110°, 75°, 45° y 95° trazados todos con un mismo radio, se sumarán sus suplementos para valuar de una vez su efecto por la fórmula del núm. 192. El arco total $a = \frac{395\pi}{180}.180; \frac{a}{R^2} = 0,039$,

y la altura consumida

$$\frac{135^2}{r'^4}.0,039.(0,0000202 + 0,0000022.180) = \frac{0,296}{r'^4}:$$

el último término $0,00036\frac{Q'^2}{r'^4} = \frac{0,00036.135^2}{r'^4} = \frac{6,560}{r'^4}$.

Se tiene por consiguiente la ecuacion

$$724 - 15,845 - 0,108 = \frac{18,014}{r'^3} + \frac{324,250}{r'^5} + \frac{0,296 + 6,560}{r'^4},$$

ó $$r'^5 - 0,025r'^2 - 0,458 - 0,010r' = 0;$$

y se saca

$$r' = 0,87.$$

Puede notarse que el efecto de los recodos representado por $\frac{0,296}{r'^4}$ equivale solamente á $0^p,39$ á pesar de ser de los mas notables que en la práctica puedan ocurrir.

En el arca B adonde suben 6790^{ppp} se debe hacer su distribucion á las cañerías BC, BD y Bg segun la proporcion establecida. El mejor medio de conseguirlo aun cuando varíe la cantidad total de agua, con la ventaja de poder

medir en todo tiempo la que llega al arca, consiste en hacerla de figura prismática ó cilíndrica de hierro colado, fig. 47. El tubo ascendente que la atraviesa segun su eje, vierte sus aguas en la caja AA. Esta se divide en dos partes por una lengüeta cilíndrica aa sujeta por su parte superior á la caja y al tubo con cintas de hierro, dejando un intervalo por debajo á fin de que pase el agua de una á otra: el objeto de esta lengüeta es amortiguar la velocidad del agua que sale del tubo para que cerca de la pared exterior aparezca tranquila. En esta pared $a'a'$ se abren orificios para dar salida al agua, y tapando el número de estos necesario para hacer que el nivel del agua coincida con la línea horizontal de antemano marcada en la pared y fijada segun la cantidad que se sabe ha de salir por cada uno de estos orificios, se tendrá la medida de la que sale del tubo. El agua se vierte en otra caja exterior BB dotada de una lengüeta bb con el mismo fin que la otra, y en su pared $b'b'$ se abren orificios por donde sale el agua á otra tercera caja CC dividida por tabiques en tantos cajones como cañerías hay. Cada uno de estos cajones recibe el agua de los orificios que le corresponden, y á su fondo se aplica el brazo descendente de la respectiva cañería. Para que haya justicia en la distribucion del agua, cualquiera que sea la variacion del caudal, es necesario que todos los orificios sean iguales, de la misma figura, equidistantes, y si tienen tubos adicionales, que sean de la misma figura y longitud. En haciendo cada orificio capaz de dar salida á una cantidad de agua que sea divisor comun de las cantidades asignadas á cada cañería, el problema estará resuelto, pues bastará hacer que en cada cajon vierta su agua el número de orificios proporcional á la cantidad respectiva.

En el ejemplo propuesto las dotaciones de las cañerías BC, Bg, BD, que son de 3726^{ppp}, 1219^{ppp} y 1809^{ppp} tienen el divisor comun 27. Su relacion es la de los números 138, 45 y 67, cuya suma 250 indicará el número de orificios que deben abrirse en la pared circular $b'b'$. Su figura puede ser circular, rectangular ó cualquiera: lo que importa es que sean iguales, que esten en una misma horizontal y equidistantes: el radio de estos orificios, si son circulares, y la altura del agua sobre su centro, se determinarán por la fórmula del número 57 bajo el supuesto de que cada uno ha de dar paso á 27^{ppp} de agua. Si parece excesivo ó no es posible abrir este número de bocas en la pared $b'b'$, se resolverá el problema con suficiente exactitud adoptando el número que parezca conveniente, 45 por ejemplo, y se reducirá la cuestion á dividir este número 45 en tres partes que tengan la relacion de los números 138, 45 y 67, resultando próximamente 25 orificios á la cañería BC, 8 á la Bg y 12 á la BD: la magnitud de cada orificio se determinará por la condicion de que dé paso á 150^{ppp} de agua por segundo.

Este medio de distribuir las aguas es el único que se presta á las variaciones de caudal con la condicion de que cada partícipe goce siempre de una porcion proporcional á la que le está asignada. El propuesto por Belidor de que enfrente de los cajones se abran vertedores rectangulares cuyas bases esten en la relacion de los caudales respectivos, no satisface completamente á esta interesante condicion, y mucho menos el de que para cada cajon se establezca un solo orificio circular de conveniente tamaño, esten ó no los centros de todos en una misma horizontal.

Cuando no importa saber la cantidad de agua que llega á una arca, se puede suprimir la caja AA. Tambien puede

suprimirse la CC, bastando aplicar á los orificios de la BB, fig. 47, tubos que vayan á ingerirse desde luego en el brazo descendente de la respectiva cañería.

Ultimamente, se puede terminar el brazo ascendente de la cañería AB, fig. 48, en el fondo de la caja ó tambor B, de hierro colado de dos á tres pies de diámetro y dos de alto, y adaptarse á los orificios abiertos en su superficie convexa los tubos por donde ha de descender el agua.

En cuanto á la magnitud que ha de darse al orificio que sirve de módulo, en el núm. 57 se dieron los medios de determinarle cuando se da la carga sobre su centro y la cantidad de agua á que ha de dar paso.

Entendida la disposicion de las arcas de reparto, continuemos en la resolucion de nuestro problema.

5.° La cañería que va del arca B á la C lleva 3726^{ppp} con una altura de 80^{p}. Hay dos recodos en los encuentros de la parte horizontal con los brazos ascendente y descendente de las arcas C y B. El diámetro se determinará como en la porcion AB observando que el efecto de la resistencia de las paredes es

$$\frac{0,000012.17430.3726}{r^3}+\frac{0,0000016.17430.3726^2}{r^5}$$
$$=\frac{779,33}{r^3}+\frac{387170}{r^5};$$

el de los recodos

$$\frac{346}{r^5};$$

el de la velocidad de la salida,

$$\frac{3726^2}{2g\pi^2r^4}=\frac{1670}{r^4};$$

y despejando r en la ecuacion resultante

$$80-\frac{1670}{r^4}=\frac{779,33}{r^3}+\frac{387170}{r^5}+\frac{346}{r^4};$$

ó $$r^5-9,66r^2-25,20r-4839,62=0$$

que da $$r=5,55.$$

6º Para el ramal Cd, cuyo caudal es de 1701^{ppp}, la longitud 30000^p y la carga 65 con tres recodos de 90°, dos verticales y uno horizontal en m, se escribirá del mismo modo la ecuacion

$$65-\frac{1701\pi^2}{2g\pi^2r^4}=\frac{0,000012.30000.1701}{r^3}+$$
$$+\frac{0,0000016.30000.1701^2}{r^5}+\frac{519}{r^4},$$

ó $$r^5-9,42r^2-13,34r-2136,65=0;$$

que dará $r=4,75$.

7.º La cañería BD de 50400^P de largo que conduce 1809^{PPP} con una carga de 84^P da lugar á la ecuacion

$$84-\frac{1809^2}{2g\pi^2r^4}=\frac{0,000012.50400.1809}{r^3}+$$
$$+\frac{0,0000016.50400.1809^2}{r^5},$$

ó $$r^5-13,025r^2-4,69r-3141,60=0$$

de donde sale $r=5,12$.

8.º En d' se deriva un ramal $d'j$, cuyo ángulo es de 138°: su coseno es negativo y tiene por valor 0,743. El efecto de la resistencia desde B á d' es

$$\frac{0,000012.48000.1809}{5,12^3}+\frac{0,0000016.48000.1809^2}{5,12^5}=$$
$$=7,763+71,432=79,195;$$

el del ramal $d'j$

$$\frac{0,000012.8700.54}{r'^3}+\frac{0,0000016.8700.54^2}{r'^5}$$
$$=\frac{5,638}{r'^3}+\frac{40,590}{r'^5};$$

el de la variacion de direccion,

$$\frac{0,00012.1809^2}{5,12^4}(1-0,743)^2=0,038;$$

y el de las perturbaciones en este ángulo y de la velocidad de salida,

$$\frac{0,00036.54^2}{r'^4}=\frac{1,05}{r'^4};$$

la ecuacion del núm. 215 es pues

$$345-79,195-0,038=\frac{5,638}{r'^3}+\frac{40,590}{r'^5}+\frac{1,050}{r'^4}$$

ó $$r'^5-0,021r'^2-0,004r'-0,153=0,$$

y dá $$r'=0,69.$$

9.º La cañería bQ ha de conducir de B á n 1215^{ppp}; de n á p 270^{ppp}, de p á q 135^{ppp}.

Desde n se derivan á la fuente e de cinco caños, otros tantos tubos de plomo de 2½ pulgadas de diámetro y de 510 de largo. La carga sobre el punto e es de $108-45=63$ pulgadas.

El efecto de la resistencia de las paredes de B á n cuya longitud $=4650^P$ es

$$\frac{0,000012.4650.1215}{r^3}+\frac{0,0000016.4650.1215^2}{r^5}$$
$$=\frac{67,8}{r^3}+\frac{10985}{r^5}.$$

El de la resistencia de las paredes de los cinco tubos de plomo,

$$5\left(\frac{0{,}000012.510.189}{1{,}25^3}+\frac{0{,}0000016.510.189^2}{1{,}25^5}\right)$$
$$=4{,}48+47{,}76=52{,}24.$$

El de la variacion de direccion suponiendo $\alpha=90°$,

$$\frac{0{,}00012.1215^2}{r^4}=\frac{177{,}15}{r^4}.$$

El de la perturbacion y velocidad de salida

$$\frac{0{,}00036.189^2}{1{,}25^4}=5{,}26.$$

La ecuacion del núm. 215 será

$$63-\frac{67{,}8}{r^3}-\frac{10983}{r^5}-\frac{177{,}15}{r^4}=52{,}24+5{,}26=57{,}50$$

ó $$r^5-12{,}30r^2-32{,}20r-1996{,}50=0$$
y da para el radio de la cañería desde B á n
$$r=4{,}76.$$

10.° Desde n en adelante la cañería Bq solo lleva los $\frac{2}{9}$ del agua que traia hasta n, y convendrá disminuir su diámetro; pero se conservará el mismo desde n á q, aunque pierde en el camino la mitad de su caudal que sale por f. La cantidad media que supondremos á fin de que las paredes ofrezcan una resistencia media será dada como para el tramo AB por la expresion

$$\sqrt[4]{\frac{270^2.4740+135^2.7320}{4740+7320}}=199{,}30.$$

Admitiremos tambien que la pérdida de carga que tiene lugar desde n á q es de 120^p, y la ecuacion

$$120=\frac{0{,}000012.12060.199{,}30}{r^3}+\frac{0{,}0000016.12060.199{,}30^2}{r^5}$$

ó $$r^5-0{,}24r^2-6{,}38=0$$
dará $$r=1{,}47.$$

11.° El ramal pf está terminado por un tubo adicional cónico de $0{,}^p75$ de diámetro, bajo la carga de 378^p respecto del depósito A, ó de 333^p respecto del arca B. De esta se deducirá: 1.° la que tiene lugar de B á n ó $\frac{67{,}8}{4{,}76^3}+\frac{10983}{4{,}76^5}=0{,}629+4{,}494=5{,}123$; 2.° La de n á p que es $120.\frac{4740}{12060}=47{,}164$: 3.° la que produce la mudanza de direccion en p ó $\frac{0{,}00012.199{,}30^2}{1{,}47^4}=1{,}021$ puesto que $\alpha=90°$: 4.° la que produce la velocidad de salida por el tubo adicional: admitiendo que el coeficiente de contraccion que le corresponde es $m'=0{,}90$, su valor $\frac{Q'^2}{2gm'^2\omega_2^2}$ del núm. 214 es $\frac{0{,}00012.135^2}{0{,}90^2.0{,}375^4}=136{,}537$. La altura consumida por las paredes del ramal es

$$\frac{0{,}000012.8640.135}{r'^3}+\frac{0{,}0000016.8640.135^2}{r'^5}=$$
$$\frac{13{,}998}{r'^3}+\frac{251{,}940}{r'^5}.$$

La debida á las perturbaciones en el ángulo p,

$$\frac{2Q'^2}{2g\kappa^2r'^4}=\frac{2.135.^2 0{,}00012}{r'^4}=\frac{4{,}374}{r'^4}.$$

Con esto la primera ecuacion del núm. 215 será

$$333-136{,}537=5{,}123+47{,}164+\frac{13{,}998}{r'^3}+\frac{251{,}940}{r'^5}+$$
$$+1{,}021+\frac{4{,}374}{r'^4},$$

ó $$r'^5-0{,}098r'^2-0{,}031r'-1{,}760=0;$$
de donde $$r'=1{,}14.$$

12.° El ramal qg está terminado por un tubo adicional cilíndrico de $0,^p60$ de diámetro y $1^p,50$ de largo. De la carga 375^p contada desde B se deducirán 5,123 gastadas desde B á n y 120 desde n á q: quedan 249,877 para el valor de $h-h'$ El efecto de las paredes de este ramal es

$$\frac{0,000012.4650.81}{r'^3} - \frac{0,0000016.4650.81^2}{r'^5} =$$

$$= \frac{4,520}{r'^4} + \frac{48,803}{r'^4};$$

el de la mudanza de direccion en q

$$\frac{0,00012.199,30^2}{1,47^4}(1-\cos.45°)^2 = 0,300;$$

el de las perturbaciones en esta variacion

$$\frac{0,00012.2.81^2}{r'^4} = \frac{1,574}{r'^4};$$

el de la velocidad de salida por el tubo adicional para quien $m'=0,82$,

$$\frac{0,00012.81^2}{0,82^2.0,30^4} = 36,139:$$

y la ecuacion citada es

$$213,438 = \frac{4,520}{r'^3} + \frac{48,803}{r'^5} + \frac{1,574}{r'^4},$$

ó $\quad r'^5 - 0,021r'^2 - 0,229 - 0,007r' = 0,$

que da $\quad r' = 0,75.$

14.° Ultimamente, para el ramal qh terminado por un orificio de $0^p,50$ de diámetro, abierto en una placa delgada para quien $m'=0,62$, se tiene tambien $h-h'=249,877$;

$$h'' = \frac{0,000012.20600.54}{r'^3} + \frac{0,0000016.20600.54^2}{r'^5}$$

$$= \frac{13,549}{r'^3} + \frac{96,111}{r'^5};$$

$$\frac{Q^2}{2g\omega^2}(1-\cos.\alpha)^2 = 0,300;$$

$$\frac{2Q'^2}{2g\omega_,^2} = \frac{2.0,00012.54^2}{r'^4} = \frac{0,700}{r'^4};$$

$$\frac{Q'^2}{2gm'^2\omega_2^2} = \frac{0,00012.54^2}{0,62^2.0,25^2} = 14,565;$$

y despues

$$235,012 = \frac{13,549}{r'^3} + \frac{96,111}{r'^5} + \frac{0,700}{r_,'^4}$$

ó $\quad r'^5 - 0,057r'^2 - 0,062r' - 0,409 = 0$

de donde $\quad r' = 0,87.$

En un sistema tan compuesto como el presente, no es necesario que todas las cañerías tengan el preciso diámetro que el cálculo indica; lo que importa es que nunca se les dé un diámetro menor á fin de que no falte en ningun caso el agua que debe llevar. Un diámetro mayor ofrece la ventaja de poder hacer concurrir en la cañería una gran cantidad de agua en ciertas circunstancias en que suele necesitarse, en el caso de un incendio, por ejemplo. En nuestro problema bastará emplear calibres de 10, 6, 5, 3, 2, y 1 pulgada de radio para los respectivos tramos segun se indica en la última columna de la tabla puesta al principio de este número. D'Aubuisson aconseja que nunca se usen caños de menos de una pulgada de radio.

217. Se ha dicho en el núm. 201 que por no presentar las paredes de una cañería una superficie tan lisa como las que sirvieron en las experiencias, no podia contarse con que diese toda el agua indicada por las fórmulas. Es esencial atenuar en lo posible esta causa de entorpecimiento cuidando de no admitir caños cuya pared interior no sea muy limpia, de que se asienten de suerte que esten sus ejes

en una misma línea recta, y en los recodos formen una curva contínua á quien sean tangentes las porciones rectas, sin que aparezcan hácia el interior ni el guarnecido de las juntas, ni resalto, ni aspereza alguna que interrumpa el suave movimiento del agua.

Otra causa ademas de esta que puede entorpecer y aun llegar á interrumpir el movimiento del agua, es el aire arrastrado por la corriente, el cual como mas ligero se reune y concentra en los parages altos de una cañería. Para evitar su accion es indispensable proporcionarle salida adaptando á la cañería en estos puntos culminantes un tubo vertical á cuyo extremo se aplicará una válvula ó una llave, ó lo que es preferible siempre que tenga fácil acomodo, un tubo de plomo de mayor altura que la que pueda alcanzar el agua. Los tubos que se aplican en estos parajes para sacar el agua á la superficie y regar las dos pendientes ó guiarla á hoyos abiertos cerca de las casas donde ocurra un incendio, pueden tambien servir para este objeto.

Otro accidente no menos digno de atencion que estorba el paso del agua por las cañerías depende de los cuerpos extraños que lleva y que se adhieren á las paredes por capas concéntricas estrechando mas y mas la seccion hasta reducirla á nonada, y tambien precipitándose en los parajes mas bajos donde es menos sensible la velocidad. Los medios ideados para reparar este daño, aunque no del todo eficaces, no dejan de ser útiles. Importa mantener el agua tranquila en el depósito el tiempo necesario para que se purifique precipitándose las materias que arrastra en su corriente antes de introducirla en la cañería. En los puntos mas bajos de esta se aplican tubos que abriéndose por medio de llaves dejan salir impetuosamente el

agua, que por la mayor velocidad que adquiere arrastra y arroja fuera los sedimentos que se han formado. Al pie de las arcas es donde importa mucho abrir estos orificios, pues allí es donde por la casi insensible velocidad del agua se amontonan mas pronto dichos sedimentos. Se tiene preparada la fácil salida de estas aguas por tajeas que las conduzcan á pozos perdidos ó á las alcantarillas de la poblacion.

CAPITULO VII.

DE LOS SURTIDORES.

218. Sea una cañería CD, fig. 49, terminada en D por una caja en cuya tapa superior $a'b'$ está abierto un orificio pequeño por donde ha de salir perpendicularmente á $a'b'$ un chorro de agua llamado *Surtidor*. Designando por

h la diferencia de nivel Nd entre el depósito superior y el orificio de salida;

h' la suma de las alturas de agua consumidas por las resistencias de toda la cañería y de sus ramales, si los hay, y cuyas expresiones han sido halladas en los números anteriores;

ω' la área de la seccion de la vena contraida á su salida del orificio;

v' la velocidad del fluido á su paso por esta seccion,

ω la seccion de la cañería;

v la velocidad en la cañería;

Q el gasto del surtidor;

la ecuacion general del movimiento escrita en el número 199 será ahora

$$h-\frac{v'^2}{2g}=h'$$

ó $h-h'=\frac{v'^2}{2g}$;

el valor de v de quien son funciones los términos expresados por h' se introducirá bajo la forma $\frac{v'\omega'}{\omega}$, y una vez determinada v' por esta ecuacion, será conocido el gasto Q.

La altura á que sube el agua deberia ser $\frac{v'^2}{2g}$; pero cuando el surtidor es vertical, el agua que desciende se opone al movimiento ascendente de la columna fluida, y en todos los casos lo impide tambien la resistencia del aire.

Las experiencias hechas por Mariotte y Bossut para determinar la disminucion de la altura producida por estas causas en el caso de ser vertical el surtidor, parecen indicar que esta disminucion es proporcional al cuadrado de la carga $h-h'$ en cuya virtud sale el agua por el orificio; de suerte que designando por h'' la altura efectiva del surtidor, su expresion es, tomando la pulgada por unidad lineal,

$$h''=h-h'-0,00023(h-h')^2.$$

Cuando el surtidor no sale verticalmente, esta disminucion, debida á la resistencia del aire, no es ni con mucho tan notable, y puede sin inconveniente ser menospreciada.

219. Si al orificio d se aplica un tubo adicional cilíndrico, cuya longitud sea de dos ó tres diámetros, la velocidad de salida por su boca será $0,82v'$; la altura del surtidor $0,82^2\frac{v'^2}{2g}=0,67.\frac{v'^2}{2g}$; el gasto $Q=\frac{0,82}{0,62}\omega'v'=1,32\,\omega'v'$.

Estos caños gastan, pues, un tercio mas de agua, y el surtidor asciende un tercio menos. Tienen ademas el inconveniente de no presentar la columna fluida tan lisa y trasparente como los orificios abiertos en una placa delgada.

Los tubos cónicos ofrecen inconvenientes semejantes.

Segun la convergencia de sus lados, núm. 71, la velocidad estará comprendida entre $0,85v'$ y $0,95v'$; la altura del surtidor entre $0,85^2.\frac{v'^2}{2g}=0,72.\frac{v'^2}{2g}$ y $0,95^2\frac{v'^2}{2g}=0,90\frac{v'^2}{2g}$;

el gasto Q entre $\frac{0,85}{0,62}\omega'v'=1,37\,\omega'v'$ y $\frac{0,95}{0,62}\omega'v'=1,53\omega'v'$.

El surtidor gasta aun mas agua que en los caños cilíndricos, pero la disminucion de altura no es tanta. La columna fluida es tambien mas lisa y trasparente.

220. Cuando la placa $a'b'$ en que está abierto el orificio no es horizontal, *fig.* 50, el chorro describe una curba dmn cuya mayor ordenada mp y amplitud dn importa calcular. Llamando

- v' la velocidad inicial del fluido á su salida por d;
- α el ángulo que la tangente á la curva en d forma con el horizonte;
- x,y las coordenadas dP, PM de un punto cualquiera de la curva;
- a,b la amplitud dn y la mayor ordenada pm;
- g la velocidad que en cada unidad de tiempo imprime la pesantez;

prescindiendo de la resistencia del aire, lo que puede hacerse sin inconveniente por no ser muy grande la velocidad salida; las ecuaciones del movimiento son, núm. 40

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g\ldots\frac{d^2x}{dt^2}=0:$$

integradas dos veces y atendiendo á que si $t=0$, las velocidades en el sentido de las coordenadas son $v'\text{sen}.\alpha$ y $v'\cos\alpha$

se tiene $\frac{dy}{dt}=v'\,\text{sen}\,\alpha-gt$; $\frac{dx}{dt}=v'\cos\alpha$,

$$y=v'\,\text{sen}\,\alpha.t-\tfrac{1}{2}gt^2;\ x=v'\cos\alpha.t;$$

y eliminando t, la ecuacion de la curva descrita por el fluido es

$$y = x \tan.\alpha - \frac{g x^2}{2v'^2 \cos.^2\alpha},$$

ó una parábola cuya amplitud, haciendo $y = 0$, se halla que es

$$a = \frac{2v'^2 \text{sen.}\alpha \cos.\alpha}{g} = \frac{2v'^2}{2g} \text{sen.} 2\alpha.$$

Igualando á cero el primer coeficiente diferencial, la abscisa pd correspondiente á la máxima ordenada resulta igual á la mitad de la amplitud, y se halla

$$b = \frac{v'^2}{2g} \text{sen.}^2 \alpha.$$

221. Para hacer mas segura la direccion que se quiera dar al surtidor conviene (á pesar de los inconvenientes que acarrean) aplicar á la placa caños cónicos, poniendo su eje segun la inclinacion conveniente. Las fórmulas anteriores se aplican inmediatamente á este caso afectando á v' del coeficiente que le corresponda segun lo establecido en el núm. 71.

222. En las aplicaciones suele ser dada la cantidad de agua disponible, la posicion del orificio de salida ó su diferencia de nivel respecto del depósito, y se pone ademas por condicion la elevacion y amplitud que se desea dar á los surtidores: el problema se reduce entonces á determinar el diámetro del orificio, la especie del caño que se le ha de aplicar y su inclinacion. Para esto se determinará la altura consumida por las resistencias del acueducto establecido ó que se establezca desde el depósito hasta el punto donde se ha de colocar el surtidor; restándole de la carga total se tiene $h-h'$ ó la carga efectiva que produce la velocidad de salida.

Puesto que son dadas a y b, dividiendo uno por otro sus valores del número anterior se saca

$$\tan.\alpha = \frac{4b}{a}$$

para la inclinacion que ha de darse al caño.

Sustituido este valor de α en uno de los anteriores, por ejemplo en el de b que es $b = \frac{n^2 v'^2}{2g} \text{sen.}^2\alpha = n^2(h-h')\text{sen.}^2 \alpha$, se podrá despejar n, y este coeficiente indicará por medio de la tabla del número 71 el ángulo de convergencia que deberán formar las generatrices opuestas del caño cónico que conviene al caso.

La misma tabla dará tambien el coeficiente m del gasto; y por la fórmula

$$Q = m\,\omega \sqrt{2g(h-h')} = m\pi r^2 \sqrt{2g(h-h')}$$

en que Q, m, y $h-h'$ son conocidas, se calculará el radio r del caño en su boca menor. Su longitud excederá poco del cuádruplo de este radio, segun se indicó en el número 72.

Supongamos para dar un ejemplo que con 120 reales de agua se quiere formar un juego compuesto de un surtidor vertical y de 16 inclinados que partan de dos círculos cuyo centro comun esté en el de aquel. El paraje por donde ha de salir el agua está 400 pulgadas mas bajo que el depósito, y la pérdida de altura causada por el acueducto equivale á 70 pulgadas. Asi la carga efectiva es de 330 pulgadas $= h - h'$.

De los 120 reales equivalentes á 360 *ppp* por segundo, se destinarán 40 *ppp* al surtidor del medio para que sea mas grueso que los otros. Cada uno de los ocho mas próximos al centro tendrá 22 *ppp*; y cada uno de los ocho últimos 18 *ppp*.

La altura del chorro vertical será segun el núm. 218

$$h''=330-330.^2 0,00023=305^p.$$

A fin de que el conjunto de los chorros forme al poco mas ó menos una superficie semi-esférica se les dará una amplitud poco diferente de esta altura y la fijarémos en 300 pulgadas. Darémos á los de primera fila una elevacion de 250^p, y de 200^p á los de la segunda.

El diámetro del orificio del medio para quien $Q=40$, la carga $h-h'=330$, el coeficiente de contraccion $m=0,62$, se calcula por la citada fórmula $Q=m\pi r^2 \sqrt{2g(h-h')}$ que da

$$r=\sqrt{\frac{Q}{m\pi\sqrt{2g(h-h')}}}=0^p,1973.$$

A los caños de la primera fila les corresponde una inclinacion dada por la fórmula

$$\tan.\alpha=\frac{4b}{a}=3,33333$$

de donde $\alpha=73°18'$.

El coeficiente n de la velocidad se saca de la ecuacion

$$n=\frac{1}{\text{sen.}\alpha}\sqrt{\frac{b}{h-h'}}=0,89,$$

que en la tabla del núm. 71 corresponde á una convergencia de 3°46′. Se mandarán hacer los caños delineándolos con esta inclinacion.

La misma tabla da para el coeficiente del gasto $m=0,90$, y el radio de la boca menor de estos caños es

$$r=\sqrt{\frac{22}{0,90.\pi\sqrt{2g(h-h')}}}=0^p,1215.$$

Haciendo un cálculo análogo para los caños de la 2.ª fila se hallará

su inclinacion. . . . . $\alpha=69°27'$
su radio. . . . . $r=0,^p1144$
su ángulo de convergencia. $=\ldots 26'$.

Para disponer convenientemente estos surtidores se tomará una plancha de laton de 6 líneas de grueso y se le dará la forma de un segmento esférico de 20 pulgadas de radio. Esta será la tapa de la caja ó arca, y de ella arrancarán los surtidores. La caja podrá ser un cilindro de 15 pulgadas de diámetro y otras tantas de altura. Desde el vértice del casco como centro se trazarán con radios iguales á las cuerdas de los complementos 16°42′ y 20°33′ de las inclinaciones, las dos circunferencias concéntricas en que han de aplicarse los caños respectivos, poniendo los de cada fila á igual distancia unos de otros, los de la segunda enfrente de los intervalos de la primera, y todos en las direcciones normales á la superficie, ó bien en las del radio de la esfera.

Los caños vendrán á ser unos cilindros de poco mas de una pulgada de grueso que se horadarán longitudinalmente segun la convergencia indicada, y cuya longitud se hará un poco mayor que el duplo del diámetro de salida. En el caso de que sea inevitable que el caño penetre en el interior de la caja, se cuidará de darle un espesor que no baje de 4 líneas á fin de que no resulte un aumento de contraccion y la consiguiente disminucion de velocidad y de gasto de agua. La cara convexa de los caños está labrada en forma de tornillo, que se enrosca en los taladros abiertos en el segmento esférico. La boca exterior tiene una moldura saliente en quien se abren dos ranuras opuestas para alojar el destornillador, por cuyo medio se sacan y ponen los caños en el casquete.

SECCION TERCERA.

DEL CHOQUE Y RESISTENCIA DE LOS FLUIDOS.

223. Nos proponemos tratar en esta seccion de la fuerza de una masa fluida cuando animada de cierta velocidad choca con una superficie fija ó móvil, y tambien de la resistencia que un fluido opone al movimiento de un cuerpo sumergido en él, ó bien que sobrenade.

CAPITULO PRIMERO.

DEL CHOQUE DE UNA COLUMNA FLUIDA CON UN CUERPO AL AIRE LIBRE.

224. El choque de una corriente de agua con un cuerpo no es como el de dos cuerpos sólidos. En estos el efecto es ó se considera repentino, y cesando completamente la accion del choque desde aquel mismo instante, resultan los fenómenos de movimiento ó de reposo que enseñan las leyes de la mecánica. Aqui por el contrario la accion del agua sobre el cuerpo es continua: sus moléculas se suceden sin interrupcion, y ejercen sobre él una presion ó empuje que puede medirse por un peso.

Consideremos en primer lugar una columna fluida saliendo horizontalmente al aire libre por la canal baA, fig. 51, que va á chocar con una placa perpendicular á su eje y fija al extremo de una palanca angular. Siendo O el medio de DOC, y pudiendo girar al rededor de este punto, el peso P, que aplicado en D ejerciere sobre la placa en sentido contrario al de la corriente la misma accion que si estuviese aplicada por detras de ella, la mantendrá inmóvil, ó des-

truirá en cada instante la cantidad de movimiento que esta corriente imprima, en el caso de serle igual. El peso P determinado por esta condicion será por consiguiente la medida de la *fuerza* de la corriente al llegar á chocar con la placa, ó bien de la *presion* que sobre ella ejercerá.

Llamando

ω la área de la seccion de la columna fluida en AB,
v su velocidad en este punto,
Π el peso de la unidad de volúmen del fluido,
P el empuje que ejerce sobre la superficie,
t un tiempo contado desde cualquier época,

el volúmen de fluido que pasa en el instante siguiente dt es ωvdt; su peso, $\Pi\omega vdt$; su masa, $\frac{\Pi}{g}\omega vdt$; y su cantidad de movimiento, $\frac{\Pi}{g}\omega v^2dt$. La cantidad de movimiento que el peso P imprime en aquel instante, es segun el núm. 17, Pdt. Debiendo destruirse estas dos cantidades de movimiento se tiene para el equilibrio

$$Pdt=\frac{\Pi}{g}\omega v^2dt,$$

ó

$$P=\frac{\Pi}{g}\omega v^2:$$

llamando h la altura debida á la velocidad v, lo que hace $h=\frac{v^2}{2g}$ se convierte este empuje en

$$P=2\Pi\omega h,$$

ó en el doble del peso de un prisma fluido, cuya base es la seccion de la vena en AB, y cuya altura es la debida á su velocidad en dicho punto.

225. La placa MN aplicada inmediatamente al orificio

ab sufrirá solamente la presion $\Pi\omega h$, ó la mitad de la que experimenta en AB: esta diferencia proviene de la que hay entre resistir simplemente á un peso, y la de destruir ademas una velocidad.

226. Las experiencias hechas confirman el resultado $P=2\Pi\omega h$ cuando la extension de la placa MN es bastante grande para anular las velocidades de todas las moléculas fluidas, lo que exige que sea al menos diez veces mayor que la área del orificio.

Pero si esta superficie no es capaz de interceptar todas las moléculas, la presion se disminuye hasta el punto de ser solamente $P=\Pi\omega h$ cuando es igual al orificio.

227. Tambien crece ó mengua este valor segun la distancia de la placa al orificio de salida. Para que sea $P=2\Pi\omega h$ es necesario que no baje de 3 á 4 diámetros esta distancia. Mas cerca, la placa estorba el movimiento del fluido, y cuando está muy próxima vuelve á ser $P=\Pi\omega h$; mas lejos, tambien se disminuye la expresion de este empuje.

228. Ultimamente, la presion se aumenta hasta un punto muy notable, á veces hasta convertirse en $P=4\Pi\omega h$, cuando se rodea la placa de un cerco saliente, y no solamente destruye la velocidad de la vena fluida, sino que parece determinarla en sentido contrario. Los rehundidos que se abren en las paletas de algunas ruedas hidráulicas tienen por objeto aprovechar esta propiedad.

229. Supongamos en segundo lugar que la placa MN, fig. 52, forme con el eje de la vena fluida un ángulo α. Considerando que la cantidad de movimiento de la masa fluida $\frac{\Pi}{g}\omega vdt$ en el sentido perpendicular al plano es el producto de esta masa por la velocidad v estimada en este sentido ó por v sen. α, y que la presion P por actuar en sentido con-

trario debe destruir esta porcion de la cantidad de movimiento, se tendrá análogamente

$$Pdt = \frac{\Pi}{g}\,\omega v^2 \,\text{sen.}\,\alpha\, dt;$$

ó $$P = \frac{\Pi}{g}\,\omega v^2 \,\text{sen}\,\alpha;$$

ó haciendo $$\frac{v^2}{2g} = h,$$

$$P = 2\Pi\omega h \,\text{sen}\,\alpha:$$

este resultado ha sido confirmado por la experiencia.

230. Hasta aqui se ha supuesto la placa MN fija. En la mayor parte de los casos de aplicacion, lo que sucede es que la placa se mueve uniformemente al paso que recibe la accion continua del choque. Sea v' la velocidad constante de la placa, que siempre será menor que v. Puesto que antes del choque la velocidad de la vena fluida era v, y despues es v', porque el fluido acompañará á la placa en su movimiento, la velocidad destruida por el choque será $v - v'$; y repitiendo el anterior razonamiento se hallará del mismo modo:

$$P = \frac{\Pi}{g}\,\omega v(v - v')$$

para el esfuerzo ejercido sobre la placa.

231. Ultimamente, si la placa sujeta á moverse en una determinada direccion recibe oblícuamente el choque del agua, se valuará primero la velocidad que se pierde en el sentido normal á la placa, y se estimará despues en el sentido del movimiento. Siendo, fig. 52, α el ángulo dCM que el eje de la vena fluida forma con el plano de la placa, y β el MCD de este plano con la línea en cuyo sentido se mueve, la velocidad destruida en el sentido normal á la placa

es como en el número anterior $v\,\text{sen.}\,\alpha - v'\,\text{sen.}\,\beta$: su componente en el sentido CD del movimiento es

$$(v\,\text{sen.}\,\alpha - v'\,\text{sen.}\,\beta)\ \text{sen.}\,\beta.$$

Por consiguiente el empuje ejercido sobre la placa,

$$P = \frac{\Pi}{g}\,\omega v\,\text{sen.}\,\beta\ (v\,\text{sen.}\,\alpha - v'\,\text{sen.}\,\beta).$$

Sea, por ejemplo, una rueda de paletas que se mueve horizontalmente por el impulso de un chorro de agua. Esta sale por un buzon cónico de $2\frac{1}{2}$ pulgadas de diámetro bajo una carga constante de 16 pies. El ángulo del eje del chorro con la superficie de la paleta es de 80°, y el de esta superficie con el horizonte de 66°: la velocidad del punto de la paleta á quien está aplicado el eje del chorro es de 90 pulgadas por segundo. Se pide el esfuerzo ejercido sobre las paletas, y por consiguiente el que ellas son capaces de ejercer.

Se tiene, núm. 71,

$$v = m\sqrt{2g.192} = 0{,}95\sqrt{2g.192} = 382^p{,}42;$$

$$\omega = \pi r^2 = 4^{pp}{,}91;\ \alpha = 80°;\ \beta = 66°;\ v' = 90^p;$$

$$\frac{\Pi}{g} = 0{,}000000646;$$ y se halla

$$P = 0{,}001108(376{,}61 - 82{,}22) = 0^q{,}326:$$

el esfuerzo que sufren las paletas es de 0,326 quintales ó 32,6 libras.

CAPITULO II.

DEL CHOQUE DE UN FLUIDO INDEFINIDO.

232. De un fluido se dice que es *indefinido* cuando las dimensiones del cuerpo con quien choca son tan pequeñas respecto del espacio ocupado por el fluido, que el movimiento de este no experimenta ninguna alteracion de las que se

deben á la disminucion de seccion ocasionada por la presencia del cuerpo. Este es el caso de la corriente del mar cuando choca con un navío.

233. Sea un cuerpo inmóvil sumergido totalmente en un fluido en movimiento. Supongámosle prismático, fig. 53, y que su eje es paralelo á la direccion de la corriente. Si el fluido estuviese remansado, cada uno de los puntos de la superficie del cuerpo sufriria una presion que se designa con el nombre de *presion hidrostática*, y es la debida á la altura z del nivel superior sobre dicho punto. Las dos bases opuestas experimentarian una presion igual y contraria, y el cuerpo no tenderia á moverse en el sentido de su eje. Pero examinemos lo que sucede cuando el fluido se trasforma en una corriente: las moléculas fluidas al llegar al frente del prisma se ven obligadas á torcer su rumbo á derecha é izquierda, hácia arriba y hácia abajo, poco mas ó menos segun indican las líneas de la figura, presentando al prisma primeramente su convexidad y luego su concavidad para recobrar su primitiva direccion desde que le rebasen. Entre estos filetes fluidos y la base anterior del prisma queda una masa fluida, que comprimida por ellos y por el prisma, tiende á escaparse desde el centro á la circunferencia, notándose una gran velocidad en las moléculas próximas á la base del prisma. Los filetes fluidos de que hemos hablado, obligados á desviarse de su direccion, adquieren mayor velocidad y acrecientan asi la presion que experimenta la base anterior del prisma. Llamando Q la presion hidrostática sobre esta base, Ω su área, v la velocidad de la corriente, repetidas experiencias han hecho ver que para prismas semejantes el incremento de presion ocasionado por el movimiento del fluido es proporcional á la densidad del fluido, al cuadrado de la velocidad y al cuadrado de las dimensiones homólogas. Asi, siendo M un coeficiente numérico dado por la experiencia, la expresion del esfuerzo ejercido sobre el cuerpo será

$$Q+\frac{\Pi}{g}M\Omega v^2.$$

Cuando los filetes fluidos han rebasado de la base del prisma, continúan su movimiento paralelamente á las caras conservando una parte de la velocidad adquirida, tanto mayor cuanto mas corto sea el prisma. Llegados á la base posterior, convergen dejando entre sí y esta base otra masa fluida, cuyas moléculas son empujadas aguas-abajo por dichos filetes fluidos. Resulta de aqui que por detras de la base posterior del prisma ocurre una disminucion de presion como si tendiese á originarse alli un vacío, y las mismas experiencias han hecho ver que esta disminucion de presion, llamada *no presion*, es proporcional á las mismas cantidades que el incremento sobre la otra: de suerte que designando por N un coeficiente númerico dado por la experiencia, la presion sobre la base posterior del prisma es

$$Q-\frac{\Pi}{g}N\Omega v^2.$$

En cuanto á las presiones sobre las caras laterales, cualesquiera que ellas sean, no pueden menos de destruirse, porque siempre habrá por uno de los lados un punto directamente opuesto á cada uno de los del otro.

234. En resúmen pues, el esfuerzo que impele al prisma en el sentido de su eje, viene á ser la resultante de las dos presiones ejercidas sobre sus bases anterior y posterior; es decir, $Q+M\frac{\Pi v^2}{g}\Omega-(Q-N\frac{\Pi v^2}{g}\Omega)$ ó

$$P=\frac{\Pi v^2}{g}\Omega(M+N);$$

ó haciendo para abreviar $\frac{v^2}{2g}=h$, $2M=m$, $2N=n$

$$P=(m+n)\,\Pi\,\Omega h.$$

235. Resta ahora presentar los valores de los coeficientes m, n que se han deducido de experiencias directas para diferentes cuerpos.

Cuando estos cuerpos vienen á ser placas delgadas, cesan de ser semejantes entre sí; y el esfuerzo ejercido no es proporcional á la área Ω de la placa. Las experiencias indican que el coeficiente $m+n$ es mayor para las áreas grandes que para las pequeñas.

Si $\sqrt{\Omega}=4^p,30$, $m+n=1,40$;
Si $\sqrt{\Omega}=14^p$, $m+n=1,90$.

No se conoce con exactitud el valor de $m+n$ cuando las superficies exceden de la última mencionada.

236. Para un cuerpo prismático terminado por dos bases planas, el valor de m es constantemente de 1,19. La no presion, de quien depende n, mengua al paso que crece la longitud de los prismas. El coeficiente total $m+n$ toma en consecuencia los siguientes valores:
si la longitud del prisma es $=\sqrt{\Omega}$, $m+n=1,46$;
si está comprendida entre $3\sqrt{\Omega}$ y $6\sqrt{\Omega}$, $m+n=1,34$;
si excede del último valor, la presion total vuelve á crecer por causa del rozamiento del fluido sobre las caras laterales del prisma.

237. Se ha supuesto en lo que precede que los cuerpos se hallaban enteramente sumergidos en el fluido. Si solo es una porcion de ellos la sumergida, como sucede á los flotantes, á las alas de una rueda hidráulica, &c., al llegar el agua á la cara anterior del cuerpo, se levanta sobre su nivel ordinario y forma un remanso, cuyo punto mas alto

está en medio de la cara anterior, y que desciende gradualmente hácia los lados. El fluido continúa despues bajando á lo largo de las caras laterales del prisma, su superficie llega á estar mas baja que el nivel general de la corriente, y se forma por detrás de la cara posterior del prisma una especie de hoya ó remolino, en cuyo derredor aparecen muy agitadas las moléculas fluidas. Esta diferencia de nivel entre las dos bases opuestas, llamada *desnivelacion*, es causa de que la presion sobre la base anterior sea mayor, y la no presion sea menor que las correspondientes á los prismas sumergidos; pero sin embargo de esto la presion total ó bien el coeficiente $m+n$ es muy poco menor que el hallado para estos últimos y queda apuntado en los núms. 235 y 236. Parece excusado advertir que en la fórmula del núm. 234 deberá tomarse por Ω la área de la porcion sumergida de la seccion trasversal.

238. Si en vez de estar inmóvil el cuerpo, se supone que se mueve con la velocidad v' en el sentido de la corriente, la velocidad relativa del choque será $v-v'$ como cuando la vena salia al aire libre; asi el esfuerzo, proporcional al cuadrado de la velocidad, será representado por

$$P=\frac{\Pi(v-v')^2}{2g}\,\Omega\,(m+n);$$

ó representando por h' la altura debida á la velocidad $v-v'$, por

$$P=(m+n)\,\Pi\,\Omega h'.$$

Si el cuerpo se moviere en sentido contrario al de la corriente, la velocidad relativa será $v+v'$, y la misma anterior fórmula representará el esfuerzo buscado con tal que á h' se atribuya el valor $\frac{(v+v')^2}{2g}$.

239. En el caso de no ser el cuerpo prismático, se verifica tambien que el esfuerzo es proporcional á la área de la mayor de las secciones trasversales perpendiculares á la corriente, y ademas al cuadrado de la velocidad. Se podrá por consiguiente calcular esta presion por medio de las anteriores fórmulas, con tal, empero, que se haya determinado el coeficiente $m+n$ por experiencias hechas en un cuerpo semejante al de que se trate.

CAPITULO III.

DE LA RESISTENCIA DE LOS FLUIDOS.

240. En el capítulo anterior hemos aprendido á medir el esfuerzo necesario para mantener en equilibrio á un cuerpo empujado por una corriente. En el presente se trata de calcular el esfuerzo que se necesita para mover un cuerpo sumergido en un fluido tranquilo, á cuyo esfuerzo se da el nombre de *resistencia de los fluidos*, y tambien el de *resistencia de los medios* en que se mueven los cuerpos.

Los fenómenos que ocurren en este movimiento son enteramente parecidos á los de que se dió cuenta en el núm. 233 cuando era el fluido el que se movia. Asi la expresion de la resistencia será de la misma forma

$$R=(m+n)\,\Pi\,\Omega\,h;$$

Señalando

Π el peso de la unidad de volúmen del agua;

Ω la área de la seccion trasversal del cuerpo;

h la altura debida á la velocidad del cuerpo,

ó $\frac{v^2}{2g}$ si el fluido está remansado; y la debida á la velocidad

relativa $v-v'$ ó $v+v'$, segun que el cuerpo se mueva en el sentido mismo ó en el opuesto á la corriente, esto es, $\frac{(v-v')^2}{2g}$ en el primer caso, y $\frac{(v+v')^2}{2g}$ en el segundo; pero los valores del coeficiente $m+n$ difieren en la mayor parte de los casos de los anotados en los núms. 235 y 236. Los deducidos de diversas experiencias son los siguientes.

241. Para los planos ó placas delgadas, la resistencia crece en mayor razon que la superficie, como sucedia en el choque.

Cuando $\sqrt{\Omega}=14^p$, se ha hallado $m+n=1{,}43$.

242. Si el cuerpo es prismático,

y su longitud $=\sqrt{\Omega}$, $m+n=1{,}20$;

y si está comprendida entre $3\sqrt{\Omega}$ y $6\sqrt{\Omega}$, $m+n=1{,}10$;

si excede la longitud de $6\sqrt{\Omega}$, la resistencia vuelve á crecer por causa del rozamiento del fluido sobre las caras laterales del cuerpo.

243. Si la cara anterior del prisma es inclinada hácia adelante, la resistencia se disminuye notablemente. Para dos prismas rectangulares terminados por un plano inclinado, formando en el uno un ángulo de 43° con el eje, y de 25°16′ en el otro, los valores de $m+n$ han sido respectivamente 0,65 y 0,46. Trastornando ambos prismas, de suerte que la inclinacion fuese hácia atrás, se ha hallado $m+n=1{,}36$ en el primero, y $m+n=1{,}12$ en el segundo. La resistencia viene á ser casi doble de la del primer caso, lo cual no es de extrañar atendiendo á que en este tiende el fluido á levantar el prisma, y en el segundo á hundirle.

244. Añadiendo una proa á una barca prismática, tambien es de consideracion lo que se disminuye la resistencia. La proa formada de dos planos verticales, cuya salida sea igual

á la anchura de la barca, reduce la resistencia á cerca de la mitad. La misma disminucion se consigue haciéndola de un semicilindro circular. Si el ángulo saliente de los dos planos es de 30° á 36°, la resistencia queda reducida á los $\frac{2}{5}$ de la que hay cuando no tiene proa. A salida igual, la proa cuya base es un triángulo mistilíneo, trazado desde centros situados en la perpendicular á los extremos de las caras, es la que mas disminuye la resistencia.

245. Las popas añadidas á una barca prismática, cuando su longitud es cuatro ó cinco veces mayor que la anchura, solo disminuyen la resistencia en $\frac{1}{10}$. La disminucion es tanto mayor cuanto mas larga y mas aguda es la popa.

246. Las experiencias hechas en un modelo de navío, movido en el sentido de su eje, han dado para este cuerpo $m+n=0,16$. En la fig. 54 está representada su seccion horizontal, hecha á la mitad de la altura: su longitud discrepa poco del quíntuplo de su mayor anchura: la mayor seccion vertical está algo mas cerca de la proa que de la popa, y disminuye de este lado muy lentamente en las inmediaciones de la mayor seccion. Multitud de experiencias hace presumir que esta figura difiere poco del *sólido de menor resistencia*, quiero decir, del cuerpo que moviéndose en un fluido sufriese la menor resistencia posible.

247. Por último, para una esfera que se mueva con una velocidad no muy grande el valor de $m+n$ es 0,60.

248. Y ya que hablamos de la resistencia de los fluidos á los cuerpos que en ellos se mueven, no dejaremos este artículo sin apuntar la que experimenta una esfera en el aire por ser un dato importante en el problema de la balística.

Su valor analítico es tambien

$$R=(m+n)\Pi\Omega h$$

siendo Π el peso de la unidad cúbica del aire (*), Ω la área del círculo máximo, y h la altura $\frac{v^2}{2g}$ debida á la velocidad que lleva; pero el coeficiente $m+n$ crece con la velocidad, de suerte que del valor 0,60 que tiene cuando la velocidad es de 4 pies por segundo, sube á los que indica la siguiente tabla para las velocidades que se expresan.

	Pies.	Pies.	Pies.	Pies.	Pies.
Valores de v.....	90	180	360	900	1800
Valores de $m+n$.	0,69	0,70	0,72	0,81	1,04

CAPITULO IV.

DE LA RESISTENCIA QUE EXPERIMENTAN LAS BARCAS EN LOS CANALES ESTRECHOS.

249. Cuando la anchura del canal no llega á ser cuatro ó seis veces mayor que la de la barca, experimenta esta al moverse una resistencia de mas monta que en un fluido indefinido.

Empujada el agua por la barca, y obligada á ascender por su cara anterior, tiende, es verdad, á precipitarse por los costados como en un fluido indefinido; mas no puede escaparse con tanta facilidad y prontitud, y así es que el

(*) El pie cúbico de aire atmosférico á $32\frac{2}{3}$ pulgadas de altura del barómetro y á 10° del termómetro centígrado, pesa 0^{r},0005889, y la pulgada cúbica 0,3149 granos.

cuerpo se lleva consigo hácia adelante una porcion de ella; tanto mas considerable cuanto mas angosto es el espacio entre el cuerpo y las orillas del canal, resultando por consiguiente un esfuerzo mayor para moverle con una velocidad dada.

250. Analizando las experiencias de Bossut, ha establecido Dubuat una fórmula para determinar la relacion entre esta resistencia y la que experimentaria en un fluido indefinido. Llamando

R esta resistencia en un fluido indefinido, calculada segun la regla del núm. 240 para un prisma sin proa ni popa,

R' la resistencia del mismo cuerpo en un canal estrecho,

Ω la área de la seccion sumergida del prisma,

Ω' la área de la seccion del canal,

esta fórmula es

$$R' = R \frac{8{,}46}{\frac{\Omega'}{\Omega} + 2}$$

Por ella se ve que cuando $\frac{\Omega'}{\Omega} = 6{,}46$, la resistencia es la misma que en un fluido indefinido, y que si fuesen semejantes las secciones trasversales de la barca y del canal, tambien seria la misma en siendo sus lados homólogos al poco mas ó menos como los núms. $2\frac{1}{2}$ y 1. No obstante esto, como en la superficie del agua es donde se experimenta la mayor resistencia, solamente cuando la anchura del canal es $5\frac{1}{2}$ veces la de la barca se obtiene tan poca resistencia como en un fluido indefinido.

251. La adicion de proas angulares tambien disminuye la resistencia, pero menos que en los fluidos indefinidos.

Conservando las anteriores notaciones y llamando ademas

R'' la resistencia que se busca,

q la relacion entre la resistencia del prisma con proa, y la del prisma sin proa en un fluido indefinido, calculadas ambas segun los números 242 y siguientes,

el mismo Dubuat representa los resultados de las experiencias por la fórmula empírica

$$R'' = R'\left(1 - 0{,}183\,(1-q)\left(\frac{\Omega'}{\Omega} - 1\right)\right).$$

252. Daubuisson ha comparado esta fórmula con una experiencia directa hecha por él en el canal de Lenguadoc, y ha hallado qué es necesario modificarla, al menos para este canal: la que le sustituye es

$$R'' = R'\left(1 - 0{,}26\left(\frac{\Omega'}{\Omega} - 1\right)\right).$$

Para ejemplo demos cuenta de esta experiencia.

La anchura de la superficie del canal era . . . . 63^p
La del fondo . . . . 34^p
La profundidad del agua . . . . 7^p
y por consiguiente la seccion . . . . . . $\Omega' =$ $339^{pp},5$
Las barcas mayores tienen de largo . . . . . 93^p
De anchura en el medio. { En la cubierta . . . . 19^p / En el fondo . . . . . . 16^p }
bajo la carga de 127 toneladas . . . . 2540^q
La mayor cala que se permite es de . . . . . $5^p,80$
Por consiguiente la seccion del medio $\Omega =$ 96^{pp}
La velocidad de la barca es por segundo de . . 3^p

La resistencia en un fluido indefinido, suponiendo la barca sin proa ni popa, es segun la fórmula del núm. 240

en que se hará $m+n=1$, y sabiéndose que $\Pi=0^q,47$, y $h=\frac{v^2}{2g}=0^p,128$,

$$R=5,^q775.$$

Para el canal de que se trata la resistencia de la misma barca es segun el núm. 250

$$R'=8,82.$$

Por último, puesto que la barca tiene proa, bien que solo consista en un plano inclinado hácia adelante, la resistencia segun la fórmula anterior de Daubuisson será muy próximamente

$$R''=3^q.$$

La fórmula de Dubuat suponiendo $q=0,46$ (núms. 242 y siguientes) da

$$R''=6^q,61$$

cantidad que excede del doble de la anterior.

La de Daubuisson es mas conforme con la experiencia: dos caballos, cuya fuerza empleada no pasa de $2^q,70$, llevan estas barcas con la velocidad de 34 pulgadas por segundo.

En los cálculos que se hacen para los trasportes se computa que la fuerza de traccion de una caballería mayor caminando con la velocidad de 3 pies por segundo es de $1^q,10$, y es capaz de llevar en un canal de agua estancada como el de que se trata 1200 veces este peso, ó 66 toneladas.

Este resultado es algo mayor que el que se deduce de la fórmula anterior de Daubuisson para los canales estrechos.

En un camino de hierro seria 200 veces $1^q,10$ ú....................	11 toneladas.
En un camino horizontal empedrado, 29 veces ó......................	$31^q,90$
En un camino de piedra suelta, 20 veces ó......................	$22^q,00$

253. La fórmula del núm. 240, en quien entra el factor $h=\frac{v^2}{2g}$ está fundada en el supuesto de que la resistencia de los fluidos es proporcional al cuadrado de la velocidad, y esta hipótesis habia sido siempre confirmada por la experiencia en las velocidades que solian usarse, hasta que por el empleo de la fuerza del vapor, que permitió adoptar velocidades considerables, se vió con gran sorpresa que la resistencia en vez de aumentarse en esta razon, se disminuia en gran manera desde que la velocidad pasaba de 10 ó 12 pies. Parece en efecto que en siendo las barcas muy largas y de poca cala, la rapidez de su movimiento hace que asciendan sobre las olas que por delante de ellas se originan, no necesitando asi de tanta profundidad en el canal, como cuando marchan con mediana velocidad. Esperemos á que sometidas estas experiencias á un exámen detenido, se establezca definitivamente la ley de esta resistencia. Lo que hasta ahora han dado de sí es que las riberas del canal son muy deterioradas por el continuo golpeo de las aguas, sobradamente conmovidas por las barcas que navegan con mucha velocidad, y esto obliga á revestirlas, al menos de piedra seca, en la zona inmediata á la superficie; y que de todos modos esta celeridad de los trasportes solamente trae cuenta para los viajeros y para las mercancías que segun su calidad ó las circunstancias mercantiles la necesiten, aun cuando se empleen para efectuarla las máquinas de vapor.

ERRATAS.

Antes de proceder á la lectura de este libro se deberán anotar en las correspondientes páginas las erratas que siguen.

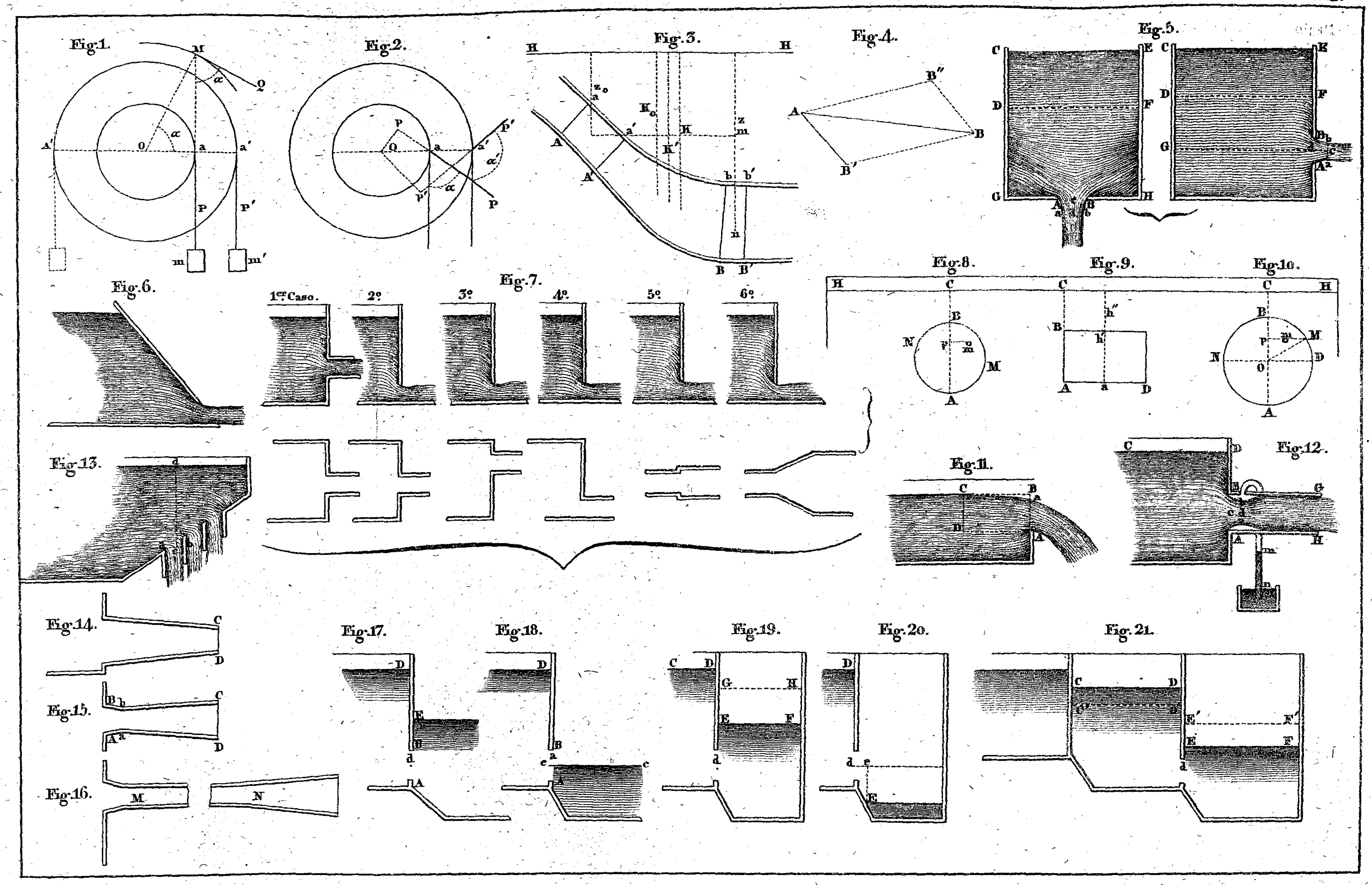
Página.	Línea.	
22	30	Póngase un acento á la a del segundo término.
25	25	En vez de *por* póngase *para*.
26	2	En el último término póngase g' despues de la letra m'.
39	28	En vez de AB ó $A'B'$ escríbase Ab ó $A'b'$.
40	11	En vez de $A'B$ escríbase $A'b$.
57	26	Donde dice *fig.* 26, debe decir *fig.* 6.
61	19 y 21	Suprímase el factor a en la primera, y póngase en la segunda.
82	26	El primer término del paréntesis debe ser $\sqrt{h}$ y no $\sqrt{2g}$.
90	17	En vez de DD escríbase Dd.
116	6	Bórrese el signo — que precede á $\frac{7}{24}$.
117	18	Donde dice *las de un*, debe decir *las aguas de un*.
125	4	En vez de $ABB'A$, debe decir $ABB'A'$.
126, 127, 128	»	En todas las expresiones de estas páginas se pondrá Π mayúscula en lugar de π minúscula.
134	19	En vez de b escríbase h.
138	4	En vez del primer signo = póngase el —.
139	18	En vez del coeficiente 13703 póngase el 13703,28.
143	25	En vez del numerador $h\omega$ póngase $i\omega$.
148	32	Bórrese la coma despues de *nacimiento*.
164	21	Despues de *primera* póngase punto y coma.
174	1	Donde dice *Constituido* debe decir *Construido*.
184	24 y 29	Donde dice *arca* debe leerse *área*.
185	5	En vez de MN debe ponerse ac.
186	14	Bórrese el signo — antes del paréntesis.
190	1	En lugar de v' póngase ω'
195	28	En vez de $\frac{2\pi}{g}$ debe ponerse $\frac{2\Pi}{g}$
198	1	Donde dice DB y DB' debe decir CB y CB'.
202	4	En el primer denominador en vez de ω^2 debe ser $\omega_2{}^2$.
204	última de la tabla.	En vez de sj debe ser $d'j$.

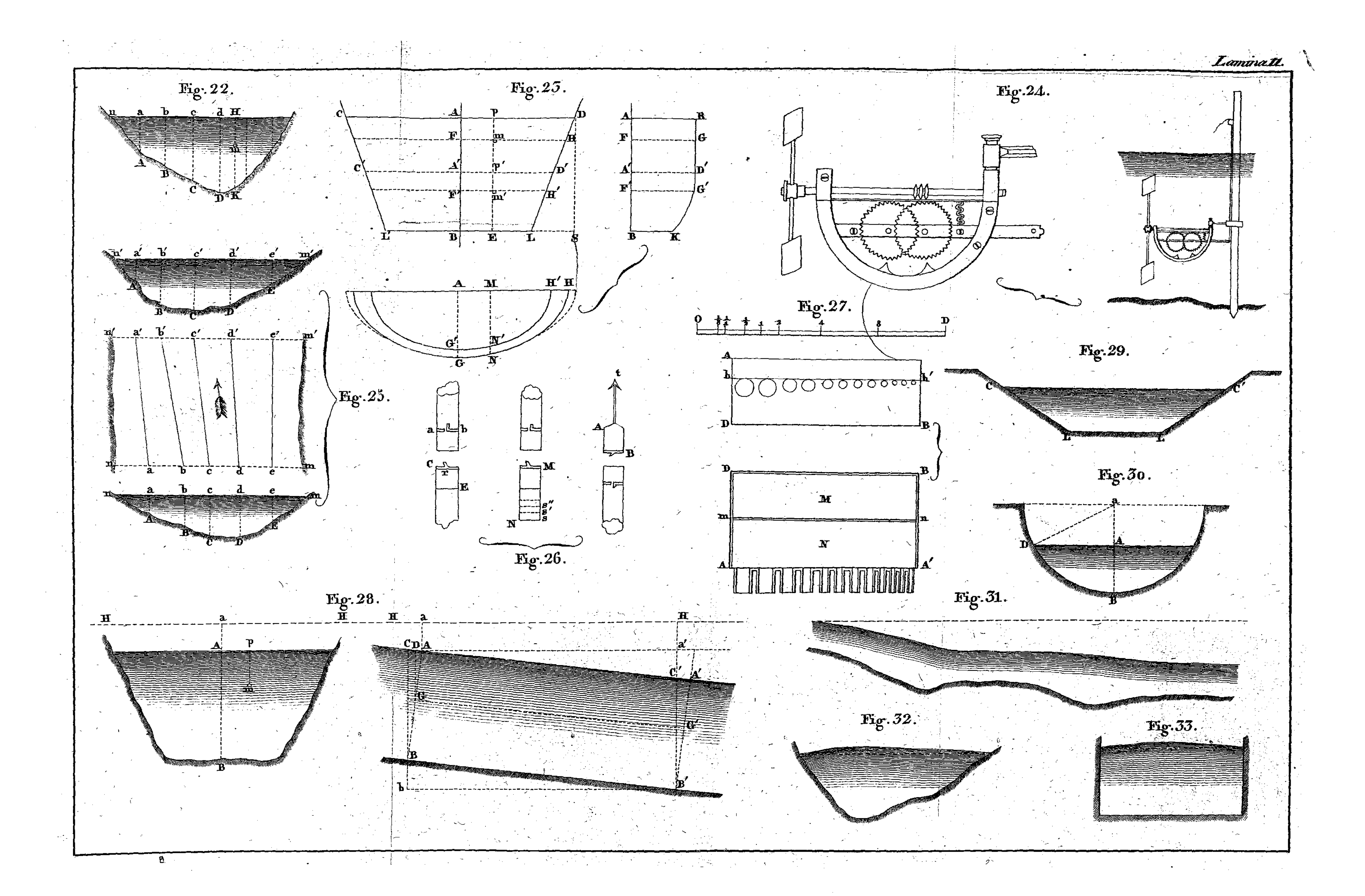
Página.	Línea.	
204	3	Donde dice Bs debe decir Bd'.
204	4	Dice $L=50°$; debe ponerse $l=40°$.
204	5	En lugar de $r=$ póngase $m=$.
		No habiéndose anotado en la figura los ángulos α', α'', se entenderá que son los que forma la prolongacion de la cañería Bq con las ramales qg y qh.
206	7	Donde dice τ debe decir π.
207	4	En vez de $\varkappa^2$ debe ponerse π^2.
207	26	En vez de x póngase α.
214	9	En lugar de $1701\pi^2$ debe decir 1701^2.
217 } 218 }	•	En estas páginas las letras P puestas á la derecha de los números denotan pulgadas, y deben ser minúsculas.
217	16	En vez de $\varkappa^2$ escríbase π^2.
218	7	El numerador del primer quebrado debe ser r'^3 y el del segundo r'^5.
218	19	En vez de 14.° debe ponerse 13.°
219	5	Donde dice $r_{,}^{4}$ debe decir r'^4.
223	27	Donde dice y, debe decir y.
225	5	En vez de x debe ponerse α.
225	25	En lugar de $-k'$ debe decir $-h'$.
226	11	En el denominador en vez de $\varkappa$ debe ponerse π.

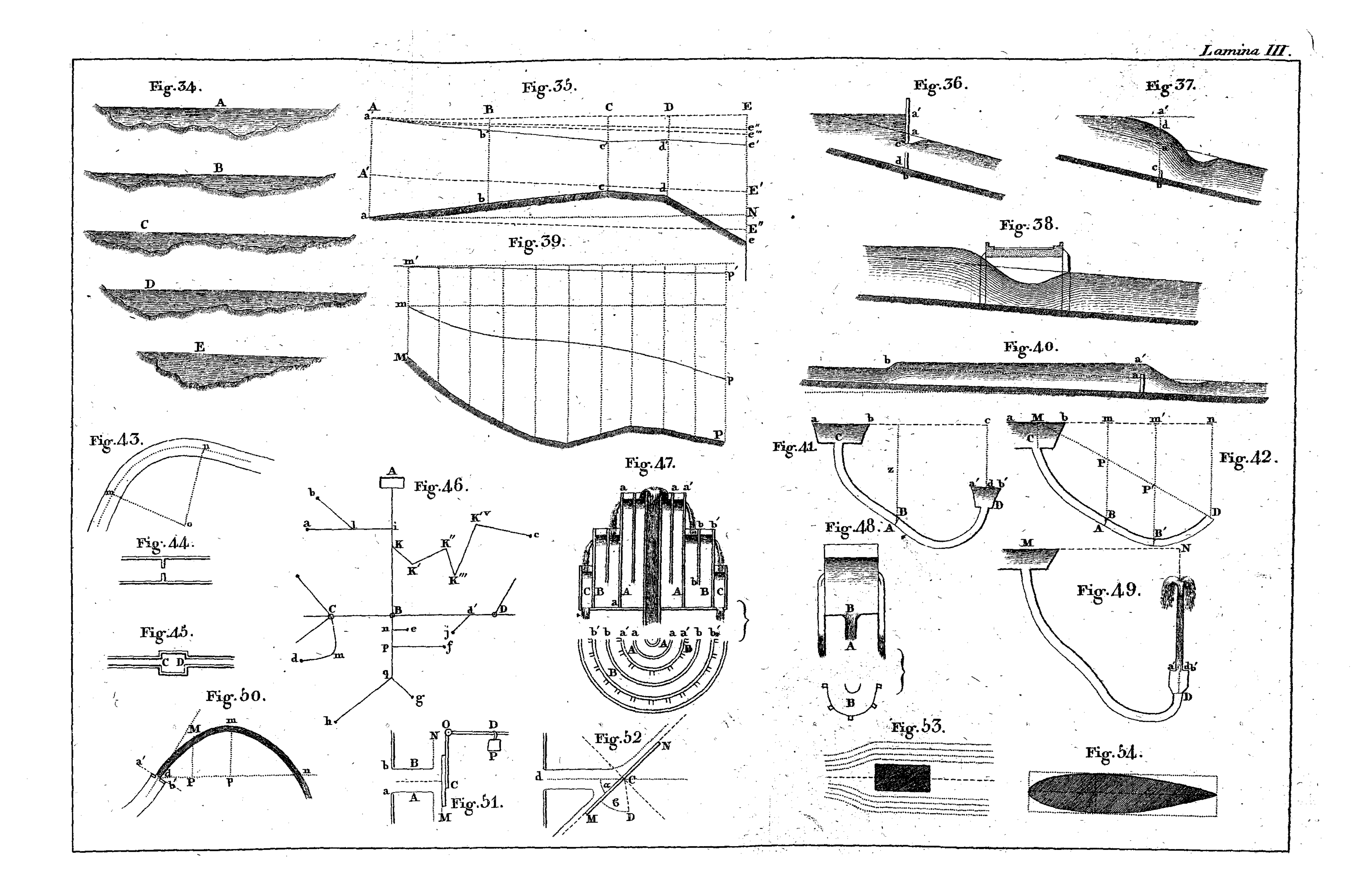
Adicion á la fe de erratas de la TEORIA MECANICA DE LAS CONSTRUCCIONES, *del mismo autor.*

Página.	Línea.	
54	8	Dice *núm.* 70, y debe ser *núm.* 71.
78	27	Los números que se citan deben ser 41, 62, 109.
79	2	El número citado debe ser el 71.
81	antepenúlt.	En vez de 30 póngase 60.
85	15	En vez de *núm.* 123 escríbase *núm.* 129.
105	21	El denominador 12 debe ser 6.
125	12	En vez del término $3a^2k^2$ escríbase $30a^2k^2$.
163	19	En vez de $\frac{R}{\cos.\,\zeta}$ póngase $\frac{Q}{\cos.\,\zeta}$.
168	27	El número que se cita es el *núm.* 255.
176	2	El número citado debe ser el 228.
188	17	El número citado debe ser el 267, y el denominador $2f$.
252	28	En vez de $\frac{Fa}{\cos.\,\zeta}$ escríbase $\frac{Fa}{\text{sen.}\,\zeta}$.
263	28	Despues de *en vez de m* añádase: En este y el siguiente caso c representa la distancia entre los muros laterales opuestos contada de eje á eje.
267	26	En vez de *núm.* 403 póngase *núm.* 400.
282	22	El número citado debe ser el 149.
289	28	En vez de $p''\cos.\,\alpha''$ escríbase $p''\,\text{sen.}\,\alpha''$.
292	22	En vez del signo < póngase el >.
314	antepenúlt.	Bórrese el paréntesis abierto despues de $\frac{z}{2\varepsilon}$ y cerrado al fin.
319	7	Escríbase: la tension $pc+p'c'\frac{2\,\text{sen.}\,\alpha\cos.\,\zeta}{\text{sen.}\,(\alpha+\zeta)}$ sufre &c.
339	17	En vez de $\frac{\Pi hh'}{2}$ escríbase $\Pi hh'$.
343	11	En vez de *el* objeto póngase *al* objeto.
366	1	Dice: son el arco generador &c.; debe decir: son para cada punto la hélice directriz y una perpendicular á esta curva. Los lechos son el lugar

Página.	Línea.	
		geométrico de las hélices del mismo paso formadas por los diversos puntos de las aristas *Dd*, A las superficies de junta se suelen sustituir planos que se tiran perpendicularmente á la hélice inferior; ó mejor á la hélice media de cada hilada, y resultan inclinados al horizonte.
367	25	En vez de *inferior* escríbase *media*.
389	2	Al denominador 2 sustitúyase 4.
Id.	7	En vez del coeficiente 30 escríbase el 15.
Id.	última.	En vez de 30 escríbase 15, y póngase el coeficiente 30 ántes de z' en el segundo término del denominador.
392	•	La letra F en el núm. 634 debe ser F''.
	Fig. 35	Falta tirar por A una pequeña horizontal hácia la izquierda.
	Fig. 38.	La curva ABM debe trazarse de suerte que su punto B esté por debajo del eje Ax.
	Fig. 92.	Falta la horizontal mn y la letra n.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
1er Caso.
2º
3º
4º
5º
6º
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.


Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.


Lamina III.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.